

ВМК



**Методы  
математического  
моделирования,  
автоматизация  
обработки  
наблюдений  
и их применения**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ,  
АВТОМАТИЗАЦИЯ  
ОБРАБОТКИ  
НАБЛЮДЕНИЙ  
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

СБОРНИК ТРУДОВ ФАКУЛЬТЕТА  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И КИБЕРНЕТИКИ  
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией акад. А. Н. ТИХОНОВА,  
акад. А. А. САМАРСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1986

МЧМ

УДК 516.6

Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения: Сборник / Под ред. А. Н. Тихонова, А. А. Самарского. — М.: Изд-во МГУ, 1986.— 280 с.

В сборник вошли работы по развитию методов регуляризации для решения некорректно поставленных задач и использованию этих методов в обратных задачах обработки и интерпретации наблюдений. Цикл работ посвящен численным методам решения прямых и обратных задач математической физики применительно к электродинамике и геофизике. Рассмотрены вопросы математического моделирования в физике плазмы: МГД-процессы в высокотемпературной плазме, исследование временной эволюции в токамаке и др.

Для специалистов в области вычислительной математики, математической физики, автоматизации обработки наблюдений.

Рецензенты:

проф. А. Г. Свешников,  
д-р физ.-мат. наук А. Г. Сухарев

Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета

М 1502000000—064  
077(2)—86 16—86

© Издательство Московского  
университета, 1986

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>РАЗДЕЛ I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ</b>	<b>5</b>
А. М. Денисов, С. Р. Туйкина. О решении некоторых обратных задач неравновесной динамики сорбции	5
Ф. П. Васильев. О регуляризации метода Стеффенсена при неточном задании исходных данных	15
А. В. Гончарский, С. Ю. Романов, В. В. Степанов, А. М. Черепашук. Конечномерные параметрические модели в обратных задачах астрофизики	23
А. И. Гребенников. О регуляризирующих свойствах явных аппроксимирующих сплайнов	39
Е. Л. Жуковский. Статистическая регуляризация решений обратных некорректно поставленных задач обработки и интерпретации результатов эксперимента	47
А. М. Денисов, А. С. Крылов. О численном решении интегральных уравнений I рода	72
А. В. Баев. Об одном методе решения обратной краевой задачи для волнового уравнения	80
А. С. Меченов. Метод регуляризации и задачи линейной регрессии	88
<b>РАЗДЕЛ II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ</b>	<b>93</b>
Г. Т. Головин, М. М. Хапаев. К расчету параметров электротехнических устройств разностным методом и с помощью интегральных уравнений	93
А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов. Математическое моделирование многопараметрических задач нелинейной адаптивной оптики	105
В. С. Арефьев. Устойчивость и сходимость системы нелинейных разностных уравнений	120
А. Ф. Васильев, В. Я. Галкин, Е. Л. Жуковский. О статистических оценках изокинетической температуры	127
А. Г. Белов, В. Я. Галкин. Сравнительный анализ методов оценки параметров сложнеймановского распределения	135
В. Я. Галкин, В. А. Ковригин, О. А. Матвеева, С. Ю. Плискин. Об условиях интерпретируемости спектров при автоматизированной обработке сигналов одного класса	142
Е. А. Шейна. Исследование уединенных решений мелкой воды	150
М. М. Хапаев, С. Г. Осипов. О численном интегрировании уравнения Ландау—Лифшица—Гильберта	155

**РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГЕОФИЗИКИ** . . . . . 160

*А. С. Барашков, В. И. Дмитриев.* Решение обратных задач в классе квазиодномерных функций . . . . . 160

*А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов.* Исследование математических моделей микрополосковых линий . . . . . 175

*И. С. Барашков, В. И. Дмитриев.* Метод линеаризации в двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования . . . . . 199

*Н. И. Березина, Е. А. Круглова.* Решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием амплитудных и фазовых характеристик . . . . . 213

*В. И. Дмитриев, Е. Г. Салтыков.* Численный метод решения обратной задачи зондирования сферически симметричной ионосферы . . . . . 223

*А. Л. Гусаров.* К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред . . . . . 231

**РАЗДЕЛ IV. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ** . . . . . 245

*А. М. Попов.* Численное моделирование МГД-процессов в высокотемпературной плазме . . . . . 243

*В. Ф. Андреев.* Математическое моделирование временной эволюции разряда в токамаке . . . . . 259

*Н. А. Гасилов, И. В. Зотов.* Вертикальная неустойчивость тороидальной плазмы при конечной проводимости стабилизирующих элементов . . . . . 266

## Раздел I

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

А. М. Денисов, С. Р. Туйкина

## О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ

При исследовании процессов динамики сорбции значительный интерес представляет решение обратных задач, в частности определение изотермы сорбции по выходной кривой. В первой части статьи доказываются теоремы единственности этой обратной задачи в случае моделей неравновесной динамики сорбции [1], а во второй рассматриваются вопросы ее численного решения.

### § 1. Единственность решения обратных задач неравновесной динамики сорбции

1°. Рассмотрим модель неравновесной динамики сорбции в случае внутридиффузионной кинетики [2] с учетом продольной диффузии:

$$\nu u_x + u_t + a_t = Du_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$a_t = \beta(\varphi(u) - a), \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) + \lambda u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Здесь  $u(x, t)$  — концентрация газа в порах сорбента;  $a(x, t)$  — в сорбенте,  $\varphi(\xi)$  — изотерма сорбции,  $\nu$  — средняя скорость потока газа,  $D$  — коэффициент продольной диффузии,  $\beta$  — внутридиффузионный коэффициент, а  $\mu(t)$  — подаваемая входная концентрация. Константы  $\nu$ ,  $D$ ,  $\beta$  и  $\lambda$  положительны.

Введем обозначения  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ,  $Q_{Tl} = \{(x, t) : 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$ ,  $Q_T^0 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ ,  $\bar{Q}_T$  — замыкание  $Q_T$ .

Предположим, что

$$\mu(t) \in C^1[0, T], \quad \mu(0) = \mu'(0) = 0, \quad \mu(t) > 0, \quad \mu'(t) \geq 0 \quad \text{для } t > 0, \quad (5)$$

$$\varphi(\xi) \in C^1(-\infty, \infty), \quad \varphi'(\xi) > 0 \quad \text{для } \xi \in (-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad \varphi(0) = 0. \quad (6)$$

Решением задачи (1)–(4) назовем пару функций  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$ , таких, что

$$\begin{aligned} u(x, t), u_t(x, t), a(x, t), a_t(x, t) &\in C[\bar{Q}_T], \\ u_x(x, t), u_{tx}(x, t) &\in C[Q_T], \\ u_{xx}(x, t), u_{tt}(x, t) &\in C[Q_T]. \end{aligned} \quad (7)$$

$u(x, t), a(x, t)$  удовлетворяют уравнению (1) в  $Q_T$ , уравнению (2) в  $Q_T^0$  и условиям (3), (4).

Лемма 1. Если  $u(x, t), a(x, t)$  — решение задачи (1)–(4), то для любого  $t_1 \in (0, T]$  в области  $\bar{Q}_{t_1} (Q_{t_1} = (0, l) \times (0, t_1])$

$$0 \leq u(x, t) \leq \mu(t_1), \quad (8)$$

$$0 \leq a(x, t) \leq \varphi(\mu(t_1)). \quad (9)$$

Доказательство. Функция  $v(x, t) = e^{-\omega t} u(x, t)$  ( $\omega > 0$ ) удовлетворяет уравнению

$$v v_x + v_t + a_t e^{-\omega t} + \omega v - D v_{xx} = 0. \quad (10)$$

Пусть в точке  $(x_0, t_0) \in Q_{t_1}$  достигается отрицательный минимум  $v(x, t)$  в области  $Q_{t_1}$ . Тогда из уравнения (10) имеем

$$a_t(x_0, t_0) > 0. \quad (11)$$

Интегрируя (2) с условием  $a(x, 0) = 0$ , получим

$$a(x, t) = \beta \int_0^t e^{\beta(\xi-t)} \varphi(u(x, \xi)) d\xi. \quad (12)$$

$$\text{Следовательно, } a_t(x_0, t_0) = \beta (\varphi(u(x_0, t_0)) - \beta \int_0^{t_0} e^{\beta(\xi-t_0)} \varphi(u(x_0, \xi)) d\xi).$$

Так как  $u(x_0, \xi) > u(x_0, t_0)$  для  $\xi < t_0$ , то

$$a_t(x_0, t_0) \leq \beta \varphi(u(x_0, t_0)) e^{-\beta t_0}.$$

Но по предположению  $u(x_0, t_0) < 0$  и из последнего неравенства следует  $a_t(x_0, t_0) < 0$ , что противоречит (11). Следовательно, отрицательного минимума у  $v(x, t)$  в области  $\bar{Q}_{t_1}$  нет. Таким образом,  $u(x, t) \geq 0$  в  $Q_{t_1}$  и из (12) имеем  $a(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_{t_1}$ .

Аналогично можно показать, что  $v(x, t)$  не достигает положительного максимума в  $\bar{Q}_{t_1}$ . Тогда, используя произвольность числа  $\omega$ , получим  $u(x, t) \leq \mu(t_1)$  в  $\bar{Q}_{t_1}$  и, учитывая представление (12), имеем  $a(x, t) \leq \varphi(\mu(t_1))$  в  $\bar{Q}_{t_1}$ . Лемма 1 доказана.

Предположим, что функция  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет условиям (6), а

$$\varphi''(\xi) \text{ непрерывна и неположительна } \xi \in [0, \mu(T)]. \quad (13)$$

Лемма 2. Если  $u(x, t), a(x, t)$  — решение задачи (1)–(4), то существует  $\tau > 0$ , такое, что

$$u_t(x, t) \geq 0, a_t(x, t) \geq 0 \text{ в } \bar{Q}_\tau \text{ и } u_t(x, t) > 0 \text{ в } Q_\tau.$$

Доказательство. Обозначим  $z(x, t) = u_t(x, t)$  и  $w(x, t) = a_t(x, t)$ . Из неравенства (8), (9) следует, что  $z(x, 0) = 0$  и

$w(x, 0) = 0$ . Функции  $z(x, t)$  и  $w(x, t)$  являются решением краевой задачи

$$vz_x + z_t + w_t = Dz_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$w_t = \beta(\varphi'(u)z - w), \quad (15)$$

$$z(0, t) = \mu'(t), \quad z(l, t) + \lambda z_x(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Выберем  $\tau$  из условия  $\varphi'(\mu(\tau))/(\beta\tau) = \varphi'(0)$ , если  $\varphi'(\mu(T))/\beta T \leq \varphi'(0)$ , а в противном случае положим  $\tau = T$ .

Рассмотрим функцию  $v(x, t) = e^{-\omega t}z(x, t)$  и покажем, что в области  $\bar{Q}_\tau$  она не имеет отрицательного минимума. Пусть точка  $(x_0, t_0)$  является точкой отрицательного минимума  $v(x, t)$ . Тогда из уравнения (14) имеем

$$w_t(x_0, t_0) > 0. \quad (16)$$

Из уравнения (15) получим

$$w_t(x_0, t_0) = \beta \left[ \varphi'(u(x_0, t_0))z(x_0, t_0) - \beta \int_0^{t_0} e^{-\beta(t_0-\xi)} \varphi'(u(x_0, \xi)) \times \right. \\ \left. \times z(x_0, \xi) d\xi \right].$$

Так как  $z(x_0, t_0) < z(x_0, \xi)$ ,  $\xi \in [0, t_0]$ , и  $\varphi'(u(x_0, t_0)) > \varphi'(\mu(\tau))$ , то

$$w_t(x_0, t_0) \leq \beta^2 z(x_0, t_0) \int_0^{t_0} [\varphi'(\mu(\tau))/\beta t_0 - \varphi'(u(x_0, \xi))] d\xi.$$

Учитывая определение числа  $\tau$ , получим

$$w_t(x_0, t_0) \leq \beta^2 z(x_0, t_0) \int_0^{t_0} [\varphi'(0) - \varphi'(u(x_0, \xi))] d\xi \leq 0,$$

что противоречит (16). Следовательно, в области  $Q_\tau$  у функции  $v(x, t)$  отрицательного минимума нет. Таким образом,

$$v(x, t) \geq 0 \text{ в } \bar{Q}_\tau \text{ и } z(x, t) \geq 0 \text{ в } \bar{Q}_\tau.$$

Покажем, что  $w(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_\tau$ . Предположим, что  $(x_1, t_1)$  — точка отрицательного минимума  $w(x, t)$ . Тогда из уравнения (15) имеем

$$w_t(x_1, t_1) + \beta w(x_1, t_1) = \beta \varphi'(u(x_1, t_1))z(x_1, t_1).$$

Если  $(x_1, t_1)$  — точка отрицательного минимума  $w(x, t)$ , то левая часть последнего равенства отрицательна, а правая больше или равна 0. Из полученного противоречия следует, что  $w(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_\tau$ . Покажем теперь, что  $z(x, t) > 0$  в  $\bar{Q}_\tau$ . Функция  $z(x, t)$  в области  $\bar{Q}_\tau$  обладает следующими свойствами:

$$Dz_{xx} - vz_x - \beta \varphi'(u)z - z_t = -\beta w \leq 0 \text{ и } z(x, t) \geq 0.$$

Предположим, что в некоторой точке  $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_\tau$   $z(x_0, t_0) = 0$ . Тогда, применяя теорему 5 гл. 2 из [3], получим  $z(x, t) \equiv 0$  в  $\bar{Q}_{t_0}$ ,



что противоречит условию  $\mu(t) > 0$  при  $t > 0$ . Следовательно,  $z(x, t) > 0$  в  $Q_T$ , и лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что полностью условия гладкости решения, входящие в (7), используются только при доказательстве леммы 2.

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть функция  $\mu(t)$  и параметры  $\nu, D, \beta, \lambda$  в задаче (1)–(4) известны и задана функция  $\gamma(t)$ :

$$u(x^*, t) = \gamma(t), \quad x^* \in (0, l], \quad 0 < t \leq T. \quad (17)$$

Требуется определить изотерму  $\varphi(\xi)$ .

Решением обратной задачи (1)–(4), (17) назовем тройку функций  $\{u(x, t), a(x, t), \varphi(\xi)\}$ , таких, что  $u(x, t)$  и  $a(x, t)$  удовлетворяют условиям (7);  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет (6), (13) и аналитична на интервале, содержащем отрезок  $[0, \mu(T)]$ ;  $u(x, t), a(x, t), \varphi(u(x, t))$  удовлетворяют (1) в  $Q_T$ , (2) в  $Q_{T^0}$  и условиям (3), (4), (17).

Теорема 1. Если  $\{u_1(x, t), a_1(x, t), \varphi_1(\xi)\}$  и  $\{u_2(x, t), a_2(x, t), \varphi_2(\xi)\}$  — решения обратной задачи (1)–(4), (17), то  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ ,  $a_1(x, t) = a_2(x, t)$  в  $Q_T$  и  $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$  для  $\xi \in [0, M]$  ( $M = \mu(T)$ ).

Доказательство. Рассмотрим функции  $\alpha(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ ,  $b(\xi) = \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)$ ,

$$p(x, t) = \int_0^1 \varphi_1(u_1(x, t) + \theta(u_2(x, t) - u_1(x, t))) d\theta.$$

Функция  $\alpha(x, t)$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \alpha_t + \nu \alpha_x - D \alpha_{xx} + \beta p(x, t) \alpha - \beta^2 \int_0^t e^{-\beta(t-\xi)} p(x, \xi) \alpha(x, \xi) d\xi = \\ = -\beta b(u_2(x, t)) + \beta^2 \int_0^t e^{-\beta(t-\xi)} b(u_2(x, \xi)) d\xi \equiv f(x, t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\alpha(0, t) = 0, \quad \alpha(l, t) + \lambda \alpha_x(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (19)$$

$$\alpha(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (20)$$

Можно показать, что для  $\alpha(x, t)$  в области  $Q_T$  имеют место оценки

$$c_1 \min_{Q_T} \{0, \min f(x, t)\} \leq \alpha(x, t) \leq c_2 \max_{Q_T} \{0, \max f(x, t)\}, \quad (21)$$

где  $c_1, c_2 > 0$  — некоторые постоянные.

Функции  $\varphi_1(\xi)$  и  $\varphi_2(\xi)$  аналитичны и  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Если существует отрезок  $[0, \xi_1]$ , на котором  $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ , то  $\varphi_1(\xi) \equiv \varphi_2(\xi)$  для  $\xi \in [0, \mu(T)]$  и из оценки (21)  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ ,  $a_1(x, t) = a_2(x, t)$  в  $Q_T$ .

Рассмотрим другой случай:  $\varphi_1(\xi) > \varphi_2(\xi)$  (для определенности) для  $\xi \in (0, \xi_1)$ . Тогда существует  $\xi_0$ , такое, что  $b'(\xi) > 0$  для  $\xi \in (0, \xi_0)$ . Пусть  $\bar{\tau}$  — решение уравнения  $\mu(\tau) = \xi_0$  (если  $\xi_0 > \mu(T)$ , то  $\bar{\tau} = T$ ). Обозначим через  $\tau^* = \min\{\tau, \bar{\tau}\}$ , где  $\tau$  из леммы 2. Из лемм 1, 2 следует, что в  $Q_{\tau^*}$   $u_2(x, t) \leq \xi_0$  и  $u_2(x, t) > u_2(x, s)$  для  $s < t$ . Тогда из определения функции  $f(x, t)$  следует, что  $f(x, t) < 0$  в  $Q_{\tau^*}$ .

Покажем, что  $\alpha(x, t) < 0$ . Действительно, из (21) следует, что  $\alpha(x, t) \leq 0$  в  $Q_{\tau^*}$ . Следовательно, если в какой-то точке  $(x_0, t_0) \in Q_{\tau^*}$   $\alpha(x_0, t_0) = 0$ , то это точка максимума  $\alpha(x, t)$  в  $Q_{\tau^*}$ . Но тогда, записывая в этой точке уравнение (18), мы получим в левой части величину неотрицательную, а в правой — отрицательную. Следовательно,  $\alpha(x, t) < 0$  в  $Q_{\tau^*}$ , что противоречит условию теоремы  $\alpha(x^*, t) \equiv 0$ . Таким образом, предположение  $\varphi_1(\xi) > \varphi_2(\xi)$  неверно и теорема в случае  $x^* < l$  доказана.

Рассмотрим случай  $x^* = l$ . Пусть  $h(x, t)$  — решение задачи

$$\begin{aligned} h_t + v h_x - D h_{xx} + \beta p(x, t) h &= 0, \quad l/2 < x < l, \quad 0 < t \leq \tau^*, \\ h(l/2, t) &= \alpha(l/2, t), \quad h(l, t) + \lambda h_x(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq \tau^*, \\ h(x, 0) &= 0, \quad l/2 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Тогда в области  $\{l/2 \leq x \leq l, 0 < t \leq \tau^*\}$   $\alpha(x, t) \leq h(x, t) \leq 0$ .

Предположим, что  $h(l, t) \equiv 0$  для  $0 < t \leq \tau^*$ , тогда  $h_x(l, t) \equiv 0$  для  $0 \leq t \leq \tau^*$ , и из [4] следует, что  $h(x, t) \equiv 0$  для  $l/2 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \tau^*$ , что противоречит условию  $h(l/2, t) = \alpha(l/2, t) < 0$ . Следовательно, существует  $t^* \in (0, \tau^*]$ , такое, что  $h(l, t^*) < 0$ . Но тогда  $\alpha(l, t^*) < 0$ , а это противоречит условию  $\alpha(l, t) \equiv 0$ , и теорема доказана.

2°. Рассмотрим модель неравновесной динамики сорбции в случае внешнедиффузионной кинетики с учетом продольной диффузии. В этом случае уравнение (1) для функций  $u(x, t)$  и  $a(x, t)$  и условия (3), (4) остаются прежними, а уравнение (2) заменяется на следующее [5]:

$$a_t = \beta(u - \psi(a)), \quad (22)$$

где  $\psi(\xi)$  — функция, обратная к изотерме  $\bar{\varphi}(\xi)$ .

Предположим, что  $\mu(t)$  удовлетворяет условиям (5), а  $\psi(\xi)$  такова, что

$$\psi(\xi) \in C^1(-\infty, \bar{\varphi}(\infty)), \quad \psi'(\xi) > 0 \quad \text{для } \xi \in (-\infty, \bar{\varphi}(\infty)) \quad \text{и} \quad \psi(0) = 0. \quad (23)$$

Решением задачи (1), (22), (3), (4) назовем пару функций  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$ , удовлетворяющих условиям (7), уравнению (1) в  $Q_T$ , уравнению (22) в  $Q_T^0$  и условиям (3), (4).

Лемма 3. Если  $u(x, t)$  и  $a(x, t)$  — решение задачи (1), (22), (3), (4), то для любого  $t_1 \in (0, T]$

$$0 \leq u(x, t) \leq \mu(t_1), \quad 0 \leq a(x, t) \leq \bar{\varphi}(\mu(t_1)), \quad (x, t) \in \bar{Q}_{t_1}.$$

Доказательство. Рассмотрим  $v(x, t) = e^{-\omega t} u(x, t)$ . Предположим, что в точке  $(x_0, t_0) \in Q_{t_1}$  достигается отрицательный минимум  $v(x, t)$ . Тогда  $a_t(x_0, t_0) > 0$  и из (22) следует, что  $u(x_0, t_0) > \psi(a(x_0, t_0))$ , а значит  $a(x_0, t_0) < 0$ . Следовательно, существует точка  $t_2 \in (0, t_0)$ , такая, что  $a(x_0, t_2) = \min_{t \in [0, t_0]} a(x_0, t)$ . Тогда

$\psi(a(x_0, t_2)) < \psi(a(x_0, t_0)) < u(x_0, t_0)$  и  $u(x_0, t_2) - u(x_0, t_0) < u(x_0, t_2) - \psi(a(x_0, t_2)) = 0$ . Следовательно, и  $u(x_0, t_2) < u(x_0, t_0)$ , что противоречит предположению  $v(x_0, t_0) = \min_{Q_{t_1}} v(x, t)$ . Таким

образом,  $u(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_{t_1}$ .

Аналогично можно показать, что  $v(x, t)$  достигает максимума в  $\bar{Q}_{t_1}$  при  $x=0$ , а затем, используя произвольность числа  $\omega$ , получить, что

$$u(x, t) \leq \mu(t_1), \quad (x, t) \in \bar{Q}_{t_1}.$$

Пусть  $a(x, t)$  достигает максимального значения в области  $\bar{Q}_{t_1}$  в точке  $(x_0, t_0)$ . Тогда  $a_t(x_0, t_0) \geq 0$ . Следовательно,

$$u(x_0, t_0) \geq \psi(a(x_0, t_0)) \text{ и } \max_{\bar{Q}_{t_1}} a(x, t) \leq \varphi(\mu(t_1)).$$

Покажем, что  $a(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_{t_1}$ . Если  $(x_0, t_0)$  — точка отрицательного минимума функции  $w(x, t) = e^{-\omega t} a(x, t)$ , то  $a_t(x_0, t_0) < 0$ . Тогда из (22) имеем  $u(x_0, t_0) < \psi(a(x_0, t_0))$ , и так как  $a(x_0, t_0) < 0$ , то и  $u(x_0, t_0) < 0$ , что противоречит предыдущему. Лемма доказана.

Предположим, что функция  $\psi(\xi)$  удовлетворяет условиям (23),  $\psi(\xi) \in C^2[0, \varphi(M)]$  и  $\psi''(\xi) \geq 0$  для  $\xi \in [0, \varphi(M)]$ . (24)

Лемма 4. Если  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$  — решение задачи (1), (22), (3), (4), то  $u_t(x, t) \geq 0$ ,  $a_t(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_T$  и  $u_t(x, t) > 0$ ,  $a_t(x, t) > 0$  в  $Q_T$ .

Доказательство. Обозначим  $z(x, t) = u_t(x, t)$  и  $w(x, t) = a_t(x, t)$ . Функции  $z$ ,  $w$  являются решением краевой задачи

$$vz_x + z_t - w_t = D^2 z_{xx}, \quad (25)$$

$$w_t = \beta(z - \psi'(a)w), \quad (26)$$

$$z(0, t) = \mu'(t), \quad z(l, t) + \lambda z_x(l, t) = 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0.$$

Покажем, что  $z(x, t) \geq 0$  в  $Q_T$ . Допустим, что  $(x_0, t_0)$  — точка отрицательного минимума функции  $v(x, t) = e^{-\omega t} z(x, t)$  ( $\omega > 0$ ) в  $Q_T$ . Тогда из (25) получим  $w_t(x_0, t_0) > 0$ , а из (26)  $w(x_0, t_0) < 0$ . Пусть  $t_1$  — ближайшая к  $t_0$  точка локального минимума функции  $w(x_0, t)$  на отрезке  $[0, t_0]$ . Тогда, используя уравнение (26), получим

$$z(x_0, t_1) = \psi'(a(x_0, t_1))w(x_0, t_1) \text{ и } z(x_0, t_1) < 0.$$

Из определения  $t_1$  следует, что  $w(x_0, t)$  на отрезке  $[t_1, t_0]$  отрицательна. Так как  $\psi''(\xi) > 0$ , то  $\psi'(a(x_0, t_1)) \geq \psi'(a(x_0, t_0))$ , а значит,

и  $z(x_0, t_1) \leq z(x_0, t_0)$ , что противоречит сделанному предположению. Следовательно,  $v(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_T$  и  $z(x, t) \geq 0$  в  $\bar{Q}_T$ .

Предположив, что  $(x_0, t_0)$  — точка отрицательного минимума  $w(x, t)$  в  $Q_T$ , из уравнения (26) получим

$$0 \geq w_t(x_0, t_0) = \beta(z(x_0, t_0) - \psi'(a(x_0, t_0))w(x_0, t_0)).$$

Следовательно,  $z(x_0, t_0) < 0$ , что противоречит предыдущему.

Неравенство  $z(x, t) > 0$  в  $Q_T$  доказывается аналогично лемме 2.

Докажем, что  $w(x, t) > 0$  в  $Q_T$ . Предположим, что  $w(x_0, t_0) = 0$ . Следовательно, это точка минимума, и  $w_t(x_0, t_0) \leq 0$ . Тогда из (26) имеем  $\psi'(a(x_0, t_0))w(x_0, t_0) \geq z(x_0, t_0) > 0$ , что противоречит предположению. Лемма доказана.

Решением обратной задачи (1), (22), (3), (4), (17) назовем тройку функций  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $\psi(\xi)$ , таких, что  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$  удовлетворяют условиям (7);  $\psi(\xi)$  удовлетворяет (23), (24) и аналитична на интервале, содержащем отрезок  $[0, \bar{\varphi}(M)]$ ;  $u(x, t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $\psi(a(x, t))$  удовлетворяют уравнению (1) в  $Q_T$ , уравнению (22) в  $Q^0_T$  и условиям (3), (4), (17).

**Теорема 2.** Если  $u_1(x, t)$ ,  $a_1(x, t)$ ,  $\psi_1(\xi)$  и  $u_2(x, t)$ ,  $a_2(x, t)$ ,  $\psi_2(\xi)$  — решения обратной задачи (1), (22), (3), (4), (17), то  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ ,  $a_1(x, t) = a_2(x, t)$  в  $\bar{Q}_T$  и  $\psi_1(\xi) = \psi_2(\xi)$  для  $\xi \in [0, \bar{\varphi}(M)]$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функции  $\alpha(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ ,  $b(\xi) = \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)$  и  $p(x, t) = \int_0^1 \psi'_1(a_1(x, t) + \theta(a_2(x, t) - a_1(x, t))) d\theta$ . Функция  $\alpha(x, t)$  является решением

$$\alpha_t - D\alpha_{xx} + v\alpha_x + \beta\alpha - \beta^2 p(x, t) \int_0^t \alpha(x, \xi) \exp\left[-\beta \int_{\xi}^t p(x, s) ds\right] d\xi = f(x, t), \quad (27)$$

$$\alpha(0, t) = 0, \quad \alpha(l, t) + \lambda\alpha_x(l, t) = 0, \quad \alpha(x, 0) = 0,$$

где

$$f(x, t) = \beta b(a_2(x, t)) - \beta^2 p(x, t) \int_0^t b(a_2(x, \xi)) \exp\left[-\beta \int_{\xi}^t p(x, s) ds\right] d\xi.$$

Для  $\alpha(x, t)$  в  $\bar{Q}_\tau$  справедлива оценка

$$c_1 \min_{Q_\tau} \{0, \min f(x, t)\} \leq \alpha(x, t) \leq c_2 \max_{Q_\tau} \{0, \max f(x, t)\}, \quad 0 < \tau \leq T. \quad (28)$$

Предположим (для определенности), что  $\psi_1'(\xi) > \psi_2'(\xi)$  для  $\xi < \xi_0$ . Тогда на интервале  $(0, \xi_0)$  функция  $b(\xi)$  монотонно возрастает. Выберем  $\tau^*$  так, что  $\bar{\varphi}(\mu(\tau^*)) = \xi_0$  (в случае  $\bar{\varphi}(\mu(T)) < \xi_0$   $\tau^* = T$ ). Тогда в области  $Q_{\tau^*}$   $a_2(x, t) \leq \xi_0$ ,  $b(a_2(x, t)) > 0$ ,  $b(a_2(x, t)) > b(a_2(x, t))$  для  $t > \tau$ . Следовательно, в  $Q_{\tau^*}$

$$f(x, t) > \beta b(a_2(x, t))\{1 - \beta t \max_{Q_{\tau^*}} p(x, t)\}$$

и существует  $\bar{\tau} \in (0, \tau^*)$ , такое, что в  $Q_{\bar{\tau}}$   $f(x, t) > 0$ . Тогда из оценки (28) имеем  $\alpha(x, t) \geq 0$  в  $Q_{\bar{\tau}}$ .

Покажем, что  $\alpha(x, t) > 0$  в  $Q_{\bar{\tau}}$ . Предположим, что  $\alpha(x_0, t_0) = 0$ , где  $(x_0, t_0) \in Q_{\bar{\tau}}$ . Тогда точка  $(x_0, t_0)$  — точка минимума  $\alpha(x, t)$  и  $\alpha_t(x_0, t_0) \leq 0$ ,  $\alpha_{xx}(x_0, t_0) \geq 0$ ,  $\alpha_x(x_0, t_0) = 0$ . Рассматривая уравнение (27) в точке  $(x_0, t_0)$ , мы получим в левой части значение, меньшее или равное нулю; а в правой  $f(x_0, t_0) > 0$ . Следовательно,  $\alpha(x, t) > 0$  в  $Q_{\bar{\tau}}$ , что противоречит условию  $\alpha(x^*, t) \equiv 0$ , и теорема в случае  $x^* < l$  доказана. Для  $x^* = l$  доказательство проводится аналогично теореме 1.

## § 2. Численное решение обратных задач

Рассмотрим задачу определения изотермы сорбции по выходной кривой  $u(l, t)$ , предполагая, что она известна с некоторой погрешностью.

Остановимся на случае внутридиффузионной кинетики. При изучении процессов динамики сорбции широко используется класс выпуклых вверх изотерм, т. е. предполагается, что изотерма  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет условиям

$$\varphi''(\xi) \leq 0 \text{ для } \xi \in [0, 1], \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi'(1) \geq 0, \varphi'(0) \leq M.$$

(29)

Здесь приняты следующие условия нормировки:  $\mu(T) = 1$ ,  $\varphi(1) = 1$ .

Решение обратной задачи будем искать в виде некоторой заданной функции, зависящей от неизвестных параметров  $\varphi(\xi, \bar{g})$ , где вектор параметров  $\bar{g}$  принадлежит некоторому конечномерному пространству. Поскольку мы рассматриваем класс изотерм  $\Phi$ , определяемый условиями (29), то естественно потребовать, чтобы функции  $\varphi(\xi, \bar{g})$  принадлежали этому классу. Будем требовать также, чтобы функции  $\varphi(\xi, \bar{g})$  были плотны в классе  $\Phi$ , т. е. для любой  $\varphi \in \Phi$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой вектор параметров  $\bar{g}$ , принадлежащий некоторому конечномерному пространству, что  $\|\varphi(\xi) - \varphi(\xi, \bar{g})\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon$ . Сформулированные на функцию  $\varphi(\xi, \bar{g})$  требования будут выполнены, если мы в качестве  $\varphi(\xi, \bar{g})$  возьмем многочлен Бернштейна [6]:

$$\varphi(\xi, \bar{g}) = \sum_{i=0}^{N+1} g_i C_N^i \xi^i (1-\xi)^{N-i}, \quad (30)$$

где  $g_0 = 0$ ,  $g_{N+1} = 1$ , а  $g_i$  удовлетворяют следующим условиям:

$$g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1} \leq 0 \text{ для } 1 \leq i \leq N, \quad (31)$$

$$g_N \leq g_{N+1}, \quad g_1 \leq M/(N+1).$$

Неравенства (31) определяют в пространстве  $E^N$  ограниченное множество  $G^N$ .

Задачу определения изотермы можно рассматривать как задачу решения операторного уравнения  $A\varphi = u(l, t)$ , где  $A$  — оператор, ставящий в соответствие изотерме  $\varphi(\xi)$  выходную кривую  $u(l, t)$  и определяемый краевой задачей (1) — (4). Оператор  $A$  непрерывен из  $C[0, 1]$  в  $C[0, T]$ .

Пусть точная правая часть операторного уравнения нам неизвестна, а задана функция  $u_0(t)$ , такая, что  $\|u(l, t) - u_0(t)\|_{L_2[0, T]} \leq \delta$ . В качестве приближенного решения мы можем рассматривать функции  $\varphi(\xi, \tilde{g}_\delta)$  ( $\tilde{g}_\delta \in G^N$ ), такие, что

$$\|A\varphi(\xi, \tilde{g}_\delta) - u_0(t)\|_{L_2[0, T]} \leq c\delta, \quad c = \text{const} > 1. \quad (32)$$

Действительно, предполагая, что точное решение задачи  $\varphi(\xi)$  представимо в виде  $\bar{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi, \bar{g})$ , и учитывая единственность решения обратной задачи, мы получим, что при  $\delta \rightarrow 0$  векторы  $\tilde{g}_\delta$  будут сходиться к  $\bar{g}$  в метрике пространства  $E^N$ , а  $\varphi(\xi, \tilde{g}_\delta) \rightarrow \varphi(\xi, \bar{g})$  в метрике  $C[0, 1]$ .

В качестве элемента, являющегося решением неравенства (32), будем брать приближенное решение  $\varphi(\xi, g_M)$  вариационной задачи

$$\min_{g \in E^N} S(g), \quad \text{где } S(g) = \int_0^T [A\varphi(\xi, g) - u_0(t)]^2 dt,$$

с критерием (32) для окончания процесса минимизации. Для решения этой задачи минимизации можно использовать градиентные методы. Градиент функции  $S(g)$  представим в виде

$$S(g_i) = \iint_{Q_T} \beta \varphi u g_i (\xi - \psi) dx dt, \quad i = 1, \dots, N,$$

где функции  $\xi(x, t)$  и  $\psi(x, t)$  — это решение следующей краевой задачи:

$$\psi_t = -D\psi_{xx} - v\psi_x + \beta\varphi'(u)\psi - \beta\varphi'(u)\xi, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\xi_t = \beta(\xi - \psi), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$D\psi_x(l, t) + (v + D/\lambda)\psi(l, t) = 2(u(l, t) - u_0(t)), \quad 0 \leq t < T,$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \xi(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Для минимизации функции  $S(g)$  на множестве  $G^N$  можно использовать метод условного градиента.

Аналогично строится метод приближенного решения обратной задачи в случае внешнедиффузионной кинетики. Неизвестной функцией в данном случае является  $\psi(\xi)$  (обратная к изотерме) из множества функций  $\Psi$ , определяемого аналогично (1).

Приведем примеры решения модельных задач с использованием рассмотренного метода. В случае внутридиффузионной ки-

нетики в качестве «исходной» рассматривалась изотерма Лэнгмюра  $\varphi_a(\xi) = a\xi / (1 + (a-1)\xi)$ , а в случае внешнедиффузионной кинетики — к ней обратная,  $\psi_a(\xi) = \xi / (a - (a-1)\xi)$ . Для них решались задачи (1) — (4) и определялись  $u(l, t)$ . В эти «исходные данные» вносилась погрешность, и по функции  $u_0(t)$  восстанавливалась изотерма.

В краевых задачах были выбраны следующие параметры:

$$\nu = 5, D = 0,5, \beta = 10, N = 5, a = 3,$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - 4(t - 0,5)^2 & \text{для } 0 < t \leq 0,5, \\ 1 & \text{для } 0,5 < t \leq 1. \end{cases}$$

Вносимая погрешность  $\delta = 0,01$ .

В таблице приведены результаты решения обратных задач.  $\psi_M$  и  $\varphi_M$  — это приближенные решения, норма  $\|\varphi_a - \varphi\|_{C[0,1]}$  обозначена  $S_1$ , а норма  $\|u(l, t, g) - u_0(t)\|_{L_{1[0, T]}}$  обозначена  $S$ .

Для внутридиффузионной кинетики в качестве начального приближения был взят вектор параметров  $g_i = 5i / (6 + 4i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , а для внешнедиффузионной кинетики  $g_i = i / (12 - i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Таблица

$\xi$	$\psi_s(\xi)$	$\psi_M(\xi)$	$\varphi_s(\xi)$	$\varphi_M(\xi)$
0,	0,	0,	0,	0,
0,067	0,023	0,025	0,176	0,174
0,133	0,049	0,052	0,316	0,317
0,200	0,077	0,080	0,429	0,436
0,267	0,108	0,111	0,522	0,533
0,333	0,143	0,145	0,600	0,613
0,400	0,182	0,182	0,667	0,679
0,467	0,226	0,222	0,724	0,735
0,533	0,276	0,268	0,774	0,781
0,600	0,333	0,321	0,818	0,821
0,667	0,4	0,383	0,857	0,854
0,733	0,478	0,458	0,892	0,885
0,800	0,571	0,551	0,923	0,914
0,867	0,684	0,667	0,951	0,941
0,933	0,824	0,814	0,977	0,969
1,	1,	1,	1,	1,
$S_1$	—	0,021	—	0,013
$S$	—	0,010	—	0,011

## ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов А. М., Туйкина С. Р. О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции. — ДАН СССР, 1984, т. 276, с. 100—102.
2. Золотарев П. П., Калинин А. И. О стационарной стадии неравновесной динамики сорбции. — ДАН СССР, 1971, т. 199, с. 1098—1100.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.

4. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. — УМН, 1959, т. 14, № 1, с. 21—83.

5. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. II. — ЖФХ, 1946, т. 20, вып. 10, с. 1113—1126.

6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. — М.: Наука, 1966.

**Ф. П. Васильев**

## О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОДА СТЕФФЕНСЕНА ПРИ НЕТОЧНОМ ЗАДАНИИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in H, \quad (1)$$

где  $H$  — вещественное гильбертово пространство. Задача (1) является, вообще говоря, некорректной в норме  $H$ , и для ее решения нужно применять методы регуляризации [1, 2]. В частности, здесь могут быть применены методы, получаемые регуляризацией известных методов минимизации. Ниже предлагается и исследуется регуляризация метода Стеффенсена [3] при условии, когда минимизируемая функция (1) и ее производные известны не точно.

Пусть  $\langle u, v \rangle$  — скалярное произведение в  $H$ ;  $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$  — норма в  $H$ ;  $\mathcal{L}(H \rightarrow H)$  — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих  $H$  в  $H$ ;  $J'(u)$ ,  $J''(u)$  — первая и вторая производные Фреше функции  $J(u)$ ;  $J'(u, v)$  — разделенная разность первой производной, определяемая условиями

$$\begin{aligned} J'(u, v) &\in \mathcal{L}(H \rightarrow H), \quad J'(u, u) = J''(u), \\ J'(u, v)(u - v) &= J'(u) - J'(v), \quad u, v \in H. \end{aligned}$$

Введем функцию Тихонова для задачи (1)

$$T_k(u) = J(u) + \alpha_k \|u\|^2, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_k'(u) &= J'(u) + 2\alpha_k u, \quad T_k''(u) = J''(u) + 2\alpha_k E, \\ T_k'(u, v) &= J'(u, v) + 2\alpha_k E, \end{aligned}$$

где  $E$  — единичный оператор на  $H$ . В случае точно известных данных регуляризованный метод Стеффенсена имеет вид

$$u_{k+1} = u_k - (T_k'(u_k, x_k))^{-1} T_k'(u_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $x_k = u_k - \beta_k T_k'(u_k)$ ,  $\beta_k$  — числовой параметр.

Пусть вместо точных  $J'(u)$ ,  $J''(u)$ ,  $J'(u, v)$  известны лишь их приближения  $J_k'(u)$ ,  $J_k''(u)$ ,  $J_k'(u, v)$ . Тогда вместо точных  $T_k'(u)$ ,  $T_k''(u)$ ,  $T_k'(u, v)$  будем иметь дело с их приближениями

$$\begin{aligned} t_k'(u) &= J_k''(u) + 2\alpha_k u, \quad t_k''(u) = J_k''(u) + 2\alpha_k E, \\ t_k'(u, v) &= J_k'(u, v) + 2\alpha_k E, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$



а метод (2) будет иметь вид

$$u_{k+1} = u_k - D_k t_k'(u_k), \quad k=0, 1, \dots, \quad (3)$$

где  $D_k \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$  — приближение для  $(t_k'(u_k, x_k))^{-1}$ ,  $x_k = u_k - \beta_k t_k'(u_k)$ .

Приведем условия согласования параметров  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ , начального приближения  $u_0$  с погрешностями задания исходных данных, гарантирующие сильную сходимость последовательности  $\{u_k\}$ , определяемой методом (3), к нормальному решению задачи (1):

**Теорема 1.** Пусть: 1) функция  $J(u)$  выпукла, дважды дифференцируема по Фреше на  $H$ ;  $J_* = \inf_H J(u) > -\infty$ ,  $U_* = \{u \in H : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ ,  $u_*$  — нормальное решение задачи (1), т. е.  $u_* \in U_*$ ,  $\|u_*\| = \inf_{U_*} \|u\|$ ;

$$\|J'(u, v) - J'(v, w)\| \leq L(\|u - v\| + \|v - w\|), \quad (4)$$

$$L = \text{const} \geq 0, \quad u, v, w \in H;$$

2) приближения  $J_k'(u_k)$ ,  $J_k'(u_k, x_k)$  для  $J'(u_k)$ ,  $J'(u_k, x_k)$ , используемые в методе (3), таковы, что

$$\|J_k'(u_k) - J'(u_k)\| \leq \delta_{1k}(1 + \|u_k\|), \quad (5)$$

$$\|J_k'(u_k, x_k) - J'(u_k, x_k)\| \leq \delta_{2k}, \quad k=0, 1, \dots; \quad (6)$$

приближение  $D_k$  для обратного оператора  $(t_k'(u_k, x_k))^{-1}$  удовлетворяет условию

$$\|D_k - (t_k'(u_k, x_k))^{-1}\| \leq \delta_{3k}, \quad k=0, 1, \dots; \quad (7)$$

3) числовые последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\}$ ,  $\{\delta_{3k}\}$  таковы, что

$$\alpha_k > 0, \quad 1 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad \alpha_k - \alpha_{k+1} \leq D\alpha_k^2, \quad D = \frac{3^{-1}2^{-9}}{\|u_*\|(L+c)}, \quad (8)$$

$$\delta_{1k} \geq 0, \quad 0 \leq \delta_{2k} \leq \frac{\alpha_k}{2}, \quad \delta_{3k} \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \delta_{1k} + \delta_{2k}) = 0, \quad (9)$$

$$|\beta_k| \leq \frac{c}{L\alpha_k}, \quad \frac{c}{24(L+c)} \left(1 + \frac{\delta_{1k}}{2\alpha_k}\right) + 2c \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^2} (1 + \|u_*\|) \leq 1, \quad (10)$$

$$24 \left( \eta_k + \frac{\eta_k}{\alpha_k} + \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^3} \right) (2 + \eta_k)^3 (3 + 204L + 288L^2) \times \\ \times \left( 1 + \frac{c}{L} \right)^2 (1 + \|u_*\| + \|J''(u_*)\|)^2 \leq 1, \quad (11)$$

где  $c = \text{const} > 0$ ,

$$\eta_k = \frac{\delta_{1k}}{2\alpha_k} + \frac{\delta_{2k}}{\alpha_k} + \alpha_k \delta_{3k} + \frac{1}{2} \delta_{1k} \delta_{3k}; \quad (12)$$

4) начальные  $\alpha_0, \delta_{10}, u_0$  таковы, что

$$\|J'_0(u_0) + 2\alpha_0 u_0\| + \delta_{10}(1 + \|u_0\|) \leq \frac{\alpha_0^2}{48(L+c)}. \quad (13)$$

Тогда последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (3), сходится к  $u_*$  по норме  $H$ , причем

$$a_k = \|T'_k(u_k)\| \leq A\alpha_k^2, \quad k=0, 1, \dots; \quad A = \frac{1}{48(L+c)}. \quad (14)$$

Заметим, что если  $u_* = 0$ , то в (8) последнее неравенство не нужно. Отметим также, что формулировка теоремы и ее доказательство полностью сохраняются, если всюду величину  $\|u_*\|$  заменить какой-либо ее априорной оценкой  $d \geq \|u_*\|$ , а вместо  $\|J''(u^*)\|$  взять  $2Ld + \|J''(0)\|$ .

Доказательство. Из выпуклости  $J(u)$  следуют [2] сильная выпуклость функции  $T_k(u)$ , неравенство

$$\langle T_k''(u)\xi, \xi \rangle \geq 2\alpha_k \|\xi\|^2, \quad u, \xi \in H, \quad k=0, 1, \dots, \quad (15)$$

а также существование единственной точки  $v_k$ , в которой  $T_k(u)$  достигает своей нижней грани на  $H$ , причем

$$T'_k(v_k) = 0, \quad \|u - v_k\| \leq \frac{1}{2\alpha_k} \|T'_k(u)\|, \quad u \in H, \quad (16)$$

$$\|v_k\| \leq \|u_*\|, \quad k=0, 1, \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - u_*\| = 0. \quad (17)$$

Из условия (4) имеем

$$\|T'_k(u, v) - T'_k(v, w)\| \leq L(\|u - v\| + \|v - w\|), \quad u, v, w \in H, \quad (18)$$

$$\|T_k''(u) - T_k''(v)\| \leq 2L\|u - v\|, \quad u, v \in H, \quad (19)$$

С помощью индукции докажем, что метод (3) определяет некоторую последовательность  $\{u_k\}$  и верна оценка (14). При  $k=0$  оценка (14) следует из (13) и условия (5). Пусть при некотором  $k \geq 0$  известна точка  $u_k$  и верна оценка (14). Тогда из условий (5), (6) имеем

$$\|t'_k(u_k) - T'_k(u_k)\| \leq \delta_{1k}(1 + \|u_k\|), \quad (20)$$

$$\|t'_k(u_k, x_k) - T'_k(u_k, x_k)\| \leq \delta_{2k}. \quad (21)$$

В силу (16), (17)

$$\|u_k\| \leq \frac{1}{2\alpha_k} a_k + \|u_*\|. \quad (22)$$

Из (20), (22) следует

$$\|t'_k(u_k)\| \leq \left(1 + \frac{\delta_{1k}}{2\alpha_k}\right) a_k + \delta_{1k}(1 + \|u_*\|). \quad (23)$$

Тогда

$$\|x_k - u_k\| = |\beta_k| \|t'_k(u_k)\| \leq |\beta_k| \left(1 + \frac{\delta_{1k}}{2\alpha_k}\right) a_k + |\beta_k| \delta_{1k} (1 + \|u_*\|). \quad (24)$$

Отсюда с учетом неравенств (10), (14) имеем  $\|x_k - u_k\| \leq a_k/2L$ . Поэтому с помощью (9), (15), (18), (21) получим

$$\langle T'_k(u_k, x_k) \xi, \xi \rangle \geq 2\alpha_k \|\xi\|^2 - L \|x_k - u_k\| \|\xi\|^2 \geq \frac{3}{2} \alpha_k \|\xi\|^2,$$

$$\langle t'_k(u_k, x_k) \xi, \xi \rangle \geq \frac{3}{2} \alpha_k \|\xi\|^2 - \delta_{2k} \|\xi\|^2 \geq \alpha_k \|\xi\|^2, \quad \xi \in H.$$

Отсюда вытекает существование обратных операторов  $(T'_k(u_k, x_k))^{-1}$ ,  $(t'_k(u_k, x_k))^{-1}$  и следуют оценки

$$\|(T'_k(u_k, x_k))^{-1}\| \leq \frac{2}{3\alpha_k} < \frac{1}{\alpha_k}, \quad \|(t'_k(u_k, x_k))^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha_k}. \quad (25)$$

Тогда имеет смысл говорить об операторе  $D_k$ , об оценке (7) и о точке  $u_{k+1}$ , определяемой из (3). Оценка  $a_{k+1} = \|T'_{k+1}(u_{k+1})\|$ . Из (16), (17) имеем

$$\|u_{k+1}\| \leq \frac{1}{2\alpha_k} \|T'_k(u_{k+1})\| + \|u_*\|.$$

Отсюда с учетом условий (8) получим

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \|T'_k(u_{k+1})\| + 2(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \|u_{k+1}\| \leq \\ &\leq 3\|T'_k(u_{k+1})\| + 2D\alpha_k^2 \|u_*\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Оценим  $\|T'_k(u_{k+1})\|$ . Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} T'_k(u_{k+1}) &= T'_k(u_k) + T'_k(u_{k+1}, u_k)(u_{k+1} - u_k) = \\ &= T'_k(u_k, x_k) \{[(T'_k(u_k, x_k))^{-1} - (t'_k(u_k, x_k))^{-1}] T'_k(u_k) + \\ &\quad + (t'_k(u_k, x_k))^{-1} [T'_k(u_k) - t'_k(u_k)] + [(t'_k(u_k, x_k))^{-1} - \\ &\quad - D_k] t'_k(u_k)\} + [T'_k(u_k, x_k) - T'_k(u_{k+1}, u_k)] D_k t'_k(u_k). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (21), (25) следует

$$\begin{aligned} \|(T'_k(u_k, x_k))^{-1} - (t'_k(u_k, x_k))^{-1}\| &= \|(T'_k(u_k, x_k))^{-1} \times \\ &\times [t'_k(u_k, x_k) - T'_k(u_k, x_k)] (t'_k(u_k, x_k))^{-1}\| \leq \delta_{2k}/\alpha_k^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Далее, из (16) — (19), (24) имеем

$$\|T'_k(u_k, x_k)\| \leq \frac{L}{\alpha_k} a_k + L |\beta_k| \|t'_k(u_k)\| + 4L \|u_*\| + \|T''_k(u_*)\|. \quad (29)$$

Кроме того, в силу (7), (25) получим

$$\|D_k\| \leq \frac{1}{\alpha_k} + \delta_{3k} = \frac{1}{\alpha_k} (1 + \alpha_k \delta_{3k}). \quad (30)$$

С учетом соотношений (3), (7), (18), (20), (24), (25), (28) из (27) имеем

$$\|T'_k(u_{k+1})\| \leq \|T'_k(u_k, x_k)\| \left[ \frac{\delta_{2k}}{\alpha_k^2} a_k + \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k} (1 + \|u_k\|) + \right. \\ \left. + \delta_{3k} \|t'_k(u_k)\| + L(|\beta_k| + \|D_k\|) \|t'_k(u_k)\|^2 \|D_k\| \right]. \quad \text{II}$$

Подставим сюда оценки (22), (23), (29), (30) и получившееся выражение расположим по степеням  $\alpha_k^2$ ,  $a_k$ ,  $a_k^0$ . Будем иметь

$$\|T'_k(u_{k+1})\| \leq L \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2} (1 + \alpha_k |\beta_k|) + L \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2} c_{1k} + L a_k c_{2k} + \alpha_k^2 c_{3k}, \quad (31)$$

где

$$c_{1k} = (1 + \alpha_k |\beta_k| + \alpha_k \delta_{3k}) (1 + \alpha_k \delta_{3k}) \left( 1 + \frac{\delta_k}{2\alpha_k} \right)^2 - (1 + \alpha_k |\beta_k|) + \\ + \eta_k (1 + \alpha_k |\beta_k| + \frac{1}{2} |\beta_k| \delta_{1k}),$$

$$c_{2k} = (1 + \alpha_k \delta_{3k}) \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^2} \left[ \left( 1 + \alpha_k |\beta_k| + \frac{1}{2} |\beta_k| \delta_{1k} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 + \alpha_k |\beta_k| + \alpha_k \delta_{3k}) \left( 1 + \frac{\delta_{1k}}{2\alpha_k} \right) \right] (1 + \|u_*\| + \\ + \frac{\eta_k}{\alpha_k} \left[ 4\|u_*\| + \frac{1}{L} \|T''_k(u_*)\| + |\beta_k| \delta_{1k} (1 + \|u_*\|) \right]),$$

$$c_{3k} = (1 + \alpha_k \delta_{3k}) \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k^3} \left[ (4L\|u_*\| + \|T''_k(u_*)\|) (1 + \|u_*\|) + \right. \\ \left. + L \left( |\beta_k| \delta_{1k} + \frac{\delta_{1k}}{\alpha_k} (1 + \alpha_k |\beta_k| + \alpha_k \delta_{3k}) \right) (1 + \|u_*\|)^2 \right],$$

величина  $\eta_k$  взята из (12). Поскольку  $c_{1k} = c_{2k} = c_{3k} = 0$  при  $\delta_{1k} = \delta_{2k} = \delta_{3k} = 0$ , то первое слагаемое в правой части (31), не зависящее от  $\delta_{ik}$ , представляет собой главный член в оценке (31) и поэтому выделен. Подставим оценку (31) в (26). С помощью индуктивного предположения (14) получим

$$a_{k+1} \leq A \alpha_{k+1}^2 \left( \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right)^2 \left\{ \left[ 3LA \left( 1 + \frac{c}{L} \right) + \frac{2D}{A} \|u_*\| \right] + \right. \\ \left. + 3 \left( LAc_{1k} + Lc_{2k} + \frac{1}{A} c_{3k} \right) \right\} \leq A \alpha_{k+1}^2;$$

здесь мы воспользовались условием  $\alpha_k \leq 2\alpha_{k+1}$ , определением постоянных  $D, A$  из (8), (14) и неравенством

$$24 \left( LAc_{1k} + Lc_{2k} + \frac{1}{A} c_{3k} \right) \leq 1, \quad (32)$$

вытекающим из условия (11). Индукция закончена, оценка (14) доказана. Из этой оценки и неравенства (16) следует:

$$\|u_k - v_k\| \leq \frac{1}{2\alpha_k} a_k \leq \frac{1}{2} A\alpha_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (17) имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_*\| = 0$ . Теорема 1 доказана.

В качестве последовательности  $\{\alpha_k\}$ , удовлетворяющей условиям (8), можно взять

$$\alpha_k = a(k+1)^{-1/2}, \quad k=0, 1, \dots; \quad a \geq 1/(2D). \quad (33)$$

Тогда  $\alpha_0 = a$  и условие (13) запишется в виде

$$\|J'_0(u_0) + 2au_0\| + \delta_{10}(1 + \|u_0\|) \leq Aa^2. \quad (34)$$

Отсюда видно, что при любых  $u_0 \in H$  и  $\delta_{10} \geq 0$  условие (34) будет выполнено при всех достаточно больших  $a$ . Условиям (9) — (11) удовлетворяют положительные последовательности  $\{\delta_{ik}\}$ , стремящиеся к нулю, если  $\delta_{ik}$  достаточно малы; можно считать, что  $\delta_{ik+1} \leq \delta_{ik}$ ,  $k=0, 1, \dots$ . Кстати, из выражения (12) для  $\eta_k$  видно, что для выполнения (11) не обязательно, чтобы  $\{\delta_{3k}\} \rightarrow 0$ , поэтому можно взять  $\delta_{3k} = \delta_3$ ,  $k=0, 1, \dots$ , где величина  $\delta_3 > 0$  достаточно мала. Таким образом, существование последовательностей  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\delta_{ik}\}$ , удовлетворяющих условиям (8) — (13), установлено. Заметим, что в теореме 1 условие (11) может быть заменено менее жестким условием (32).

На практике вместо условий (5), (6) более реальными являются следующие условия:

$$\|J'_k(u_k) - J'(u_k)\| \leq \delta_1(1 + \|u_k\|),$$

$$\|J'_k(u_k, x_k) - J'(u_k, x_k)\| \leq \delta_2, \quad k=0, 1, \dots,$$

где  $\delta_1, \delta_2$  — фиксированные положительные постоянные. Тогда возникает важный вопрос: до какого номера целесообразно продолжать процесс (3) при заданных  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ? Теорема 1 позволяет дать ответ на этот вопрос. А именно, пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условий (5), (6), причем  $\{\alpha_k\}$  взято из (33). Можем считать, что  $\delta_1 \leq \delta_{10}, \delta_2 \leq \delta_{20}$ , так как при любых фиксированных  $\delta_{10}, \delta_{20}$  выполнения условий (10), (11) (или (32)) при  $k=0$ , а также условия  $0 < \delta_{20} < a/2$  можно добиться выбором достаточно большого числа  $a > 0$  и малого числа  $\delta_{3k} = \delta_3 > 0$ . Тогда процесс (3) следует продолжать до такого максимального номера  $k(\delta) = k(\delta_1, \delta_2)$ , при котором одновременно будут выполняться два неравенства:

$$\delta_{1k} \geq \delta_1, \quad \delta_{2k} \geq \delta_2. \quad (35)$$

Тогда  $k(\delta) \rightarrow +\infty$  при  $\delta_1 \rightarrow 0, \delta_2 \rightarrow 0$ , и согласно теореме 1  $\|u_{k(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0$ , что оправдывает сформулированное правило останова (35).

На практике можно взять  $\delta_{10} = \delta_1, \delta_{20} = \delta_2$ , выбрать  $a$  и  $\delta_{30} = \delta_3 > 0$  из выполнения условий (10), (11) (или (32)) при  $k=0$ ,

условия (34) и неравенства  $\delta_2 \leq a/2$  и затем с последовательностями  $\{\alpha_k\}$  из (33) и  $\delta_{2k} = \delta_2, \delta_{3k} = \delta_3, k=0, 1, \dots$ , вести счет по формулам (3) до максимального номера  $k=k(\delta_1, \delta_2)$ , при котором одновременно выполняются неравенства  $\delta_2 \leq \alpha_k/2$  и (11) (или (32)) с  $\delta_{1k} = \delta_1, \delta_{2k} = \delta_2, \delta_{3k} = \delta_3$ . Это правило останова равносильно правилу (35), но практически, видимо, более удобное.

Наконец заметим, что если  $\beta_k = 0$ , то  $x_k = u_k, T_k'(u_k, x_k) = T_k''(u_k)$  и метод (3) превращается в метод Ньютона для случая неточно заданных исходных данных; условия сходимости метода Ньютона могут быть получены из теоремы 1 при  $c=0, \beta_k = 0, k=0, 1, \dots$ , с заменой разностных отношений первых производных на вторые производные.

Аналогично может быть исследован регуляризованный метод Стеффенсена для задачи

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \quad (36)$$

$$U = \{u \in H : g_i(u) \leq 0, \quad i=1, m, \quad g_i(u) = 0, \quad i=m+1, s\}. \quad (37)$$

В качестве точной функции Тихонова здесь можно взять функцию

$$T_k(u) = J(u) + A_k P(u) + \alpha_k \|u\|^2, \quad k=0, 1, \dots,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(u); 0\})^p + \sum_{i=m+1}^s |g_i(u)|^p, \quad p > 2,$$

— штрафная функция множества (37). Пусть вместо точных  $J'(u), P'(u), J'(u, v), P'(u, v)$  известны их приближения  $J_k'(u), P_k'(u), J_k'(u, v), P_k'(u, v)$ . Тогда вместо точных  $T_k'(u), T_k'(u, v)$  будем иметь дело с их приближениями:

$$t_k'(u) = J_k'(u) + A_k P_k'(u) + 2\alpha_k u, \quad (38)$$

$$t_k'(u, v) = J_k'(u, v) + A_k P_k'(u, v) + 2\alpha_k v, \quad k=0, 1, \dots$$

Регуляризованный метод Стеффенсена для задачи (36), (37) будет иметь тот же вид (3), где  $t_k'(u), t_k'(u, v)$  взяты из (38).

**Теорема 2.** Пусть: 1) функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_s(u)$  дважды дифференцируемы по Фреше на  $H$ ; функции  $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u), |g_{m+1}(u)|, \dots, |g_s(u)|$  выпуклы на  $H$ ;  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ ,

$U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ ;  $u_*$  — нормальное решение задачи (36),

(37); функция Лагранжа  $L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(u), u \in H,$

$\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) : \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0\}$  имеет седловую точку  $(u_*, \lambda^*) \in H \times \Lambda_0$ :

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \quad u \in H, \quad \lambda \in \Lambda_0;$$

$$\max\{\|J'(u, v) - J'(v, w)\|\};$$

$$\|P'(u, v) - P'(v, w)\|\} \leq L(\|u-v\| + \|v-w\|), \quad u, v, w \in H;$$

$$\|P'(u)\| \leq M(1 + \|u\|), \quad M = \text{const}, \quad u \in H;$$

2) погрешности в задании исходных данных удовлетворяют условиям

$$\max \{ \|J'_k(u_k) - J'(u_k)\|; \|P'_k(u_k) - P'(u_k)\| \} \leq \delta_{1k}(1 + \|u_k\|),$$

$$\max \{ \|J'_k(u_k, x_k) - J'(u_k, x_k)\|; \|P'_k(u_k, x_k) - P'(u_k, x_k)\| \} \leq \delta_{2k};$$

выполнено условие (7);

3) последовательности  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_k\}$ ,  $\{A_k\}$ ,  $\{\delta_{1k}\}$ ,  $\{\delta_{2k}\}$ ,  $\{\delta_{3k}\}$  таковы, что

$$\alpha_k > 0, \quad \delta_{1k} \geq 0, \quad 0 \leq \delta_{2k} \leq \frac{\alpha_k}{4A_k}, \quad \delta_{3k} \geq 0, \quad A_k \geq 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + A_k^{-1} + \delta_{1k} + \delta_{2k}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k A_k^{q-1} = \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$1 \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{A_{k+1}}{A_k} \leq 2, \quad \frac{A_{k+1} - A_k}{2\alpha_k} M \leq 1;$$

$$\max \{ 2R(\alpha_k - \alpha_{k+1}); M(1+R)(A_{k+1} - A_k) \} \leq \frac{D\alpha_k^2}{A_k},$$

$$|\beta_k| \leq \frac{c}{L\alpha_k}, \quad A \left( 1 + \frac{\delta_{1k}A_k}{\alpha_k} \right) + 2(1+R) \frac{\delta_{1k}A_k^2}{\alpha_k^2} \leq \frac{1}{4c}$$

$$2^8(LAc_{1k} + Lc_{2k} + c_{3k}/A) \leq 1,$$

где

$$c = \text{const} > 0, \quad A = \frac{1}{2^8(L+c)}, \quad D = \frac{1}{2^{14}(L+c)},$$

$$R = \left( \|u_*\|^2 + 2 \sum_{i=1}^s |\lambda_i^*|^q \frac{1}{qp^{p/q}} \frac{1}{\inf_{k \geq 0} \alpha_k A_k^{q-1}} \right)^{1/2},$$

$$c_{1k} = 2(1 + \alpha_k |\beta_k| + \alpha_k \delta_{3k})(1 + \alpha_k \delta_{3k}) \left( 1 + \frac{\delta_{1k}A_k}{\alpha_k} \right)^2 -$$

$$- 2(1 + \alpha_k |\beta_k|) + 2\eta_k(1 + \alpha_k |\beta_k| + |\beta_k| \delta_{1k}A_k),$$

$$c_{2k} = 4 \frac{\delta_{1k}A_k^2}{\alpha_k^2} (1+R)(1 + \alpha_k \delta_{3k}) \left[ (1 + \alpha_k |\beta_k| + |\beta_k| \delta_{1k}A_k) + \right.$$

$$\left. + 2(1 + \alpha_k |\beta_k| + \alpha_k \delta_{3k}) \left( 1 + \frac{\delta_{1k}A_k}{\alpha_k} \right) \right] + 4(1+R) \frac{\eta_k}{\alpha_k} |\beta_k| \delta_{1k}A_k^2 +$$

$$+ \frac{A_k \eta_k}{\alpha_k} \left[ 4(R + \|u_*\|) + \frac{1}{A_k L} \|T_k''(u_*)\| \right],$$

$$c_{3k} = 2 \frac{\delta_{1k}A_k^3}{\alpha_k^3} (1 + \alpha_k \delta_{3k})(1+R) [4L(R + \|u_*\|) +$$

$$+ \|T_k^r(u_*)\|/A_k + 4L(1+R)|\beta_k|\delta_{1k}A_k] + \\ + 8L(1+R)^2 \frac{\delta_{1k}^2 A_k^4}{\alpha_k^4} (1 + \alpha_k \delta_{3k} + \alpha_k |\beta_k|) (1 + \alpha_k \delta_{3k}),$$

$$\eta_k = \frac{\delta_{1k} A_k}{\alpha_k} + \frac{2\delta_{2k} A_k}{\alpha_k} + \alpha_k \delta_{3k} + \delta_{1k} \delta_{3k} A_k;$$

4) начальные  $u_0, \alpha_0, A_0$  таковы, что

$$\|t_0(u_0)\| + 2\delta_{10} A_0 (1 + \|u_0\|) \leq A \alpha_0^2 / A_0.$$

Тогда последовательность  $\{u_k\}$ , определяемая методом (3), (38), сходится к  $u^*$  по норме  $H$ , причем

$$\|T_k'(u_k)\| \leq A \alpha_k^2 / A_k, \quad k=0, 1, \dots$$

Как и в теореме 1, здесь величину  $\|u_*\|$  всюду можно заменить ее априорной оценкой  $d \geq \|u_*\|$ . Последовательности  $\{\alpha_k\}, \{A_k\}$ , удовлетворяющие условиям теоремы 2, можно искать в виде

$$\alpha_k = a(k+1)^{-\alpha}, \quad A_k = (k+1)^\beta, \quad k=0, 1, \dots, \quad a > 0, \quad \beta > 0, \quad a > 0.$$

При фиксированном уровне погрешностей заданий исходных данных для метода (3), (38) можно предложить правило останова, аналогичное правилу (35).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
3. Ульм С. Ю. Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1964, 4, № 6, с. 1093—1097.

*А. В. Гончарский, С. Ю. Романов,  
В. В. Степанов, А. М. Черепашук*

#### КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ АСТРОФИЗИКИ

В последние годы широкое применение для определения угловых диаметров звезд нашел метод наблюдения покрытий звезд Луной [1]. Этот метод дает разрешение, как правило, на порядок выше, чем другие прямые методы, такие как амплитудная интерферометрия, спекл-интерферометрия, измерения с интерферометром Майельсона. Кроме того, метод лунных покрытий может использоваться для звезд поздних спектральных классов, для которых интерферометр интенсивностей оказывается неэффективным.



Сопоставление результатов обработки независимых наблюдений лунных покрытий дает хорошее совпадение получаемых угловых диаметров звезд [2], что свидетельствует о приемлемости физической постановки задачи.

Измерение угловых диаметров звезд методом лунных покрытий уточняет наши представления о линейных размерах звезд разных типов (при известных параллаксах), а также позволяет построить достаточно независимую от косвенных соображений шкалу эффективных температур звезд. Обработка наблюдений покрытий звезд Луной также дает возможность разрешить тесную двойственность звезд с угловым расстоянием между компонентами  $10^{-2}$ – $10^{-3}$  секунды дуги. Кроме того, можно находить точный момент геометрического затмения лунным лимбом центра диска звезды (с точностью порядка  $10^{-3}$  секунды времени), что имеет значение для астрометрии и небесной механики, в частности для уточнения теории движения Луны.

В принципе, метод покрытий звезд Луной дает возможность определять распределение яркости по диску звезды. Так, в предположении линейного закона потемнения от центра к краю звезды можно находить коэффициент потемнения. Однако, как показывают расчеты, этот метод слабо чувствителен к функции распределения яркости по диску звезды.

Для интерпретации, полученной из наблюдений дифракционной кривой, вообще говоря, необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма I рода, которое является типичным представителем класса некорректных обратных задач, т. е. задач, в которых малым изменениям исходных данных соответствуют значительные изменения решения.

Начиная с середины 60-х гг. разработаны эффективные методы регуляризации [3–5], т. е. методы решений такого класса задач. Однако задолго до появления современных методов, физики и астрономы решали обратные задачи и получали хорошие результаты там, где можно воспользоваться простой конечнопараметрической моделью, например в интерпретации кривых блеска классических затменных двойных систем. Но даже в рамках конечнопараметрической модели остается проблема корректного определения ошибок параметров. В некоторых случаях эту задачу можно решить на математическом уровне строгости [6–9], например методом доверительных интервалов, где принимается статистическая модель погрешности экспериментальной кривой и определенным образом строится случайное множество в пространстве оцениваемых параметров, которое с заданной вероятностью покрывает истинное значение.

Настоящая работа посвящена созданию эффективных алгоритмов нахождения точечных оценок и доверительных интервалов радиусов звезд, точного момента закрытия краем Луны центра звезды (рис. 1) и эффективной скорости движения края Луны в задаче покрытия звезд Луной.

Опишем общую идею метода построения доверительных обла-

стей [10]. Пусть для решаемой задачи получена экспериментальная кривая  $u(t_i)$  в конечном числе точек  $t_i$ . Для каждой  $t_i$  значения  $u(t_i)$  измерены с некоторой ошибкой. Ошибки предполага-

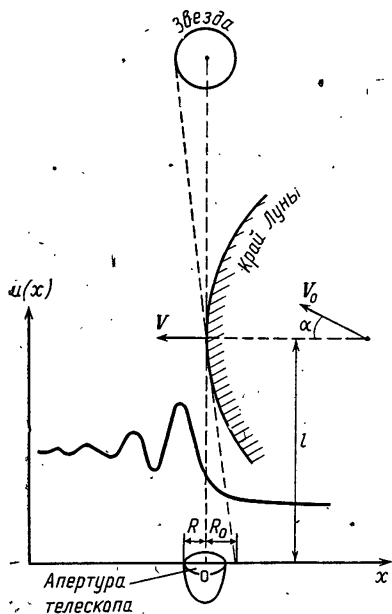


Рис. 1. При покрытии звезды Луной на Земле имеем дифракционную кривую  $u(x)$ :  $V = V_0 \cos \alpha$  — эффективная скорость края Луны,  $V_0$  — скорость Луны,  $l$  — расстояние от телескопа до края Луны,  $R$  — радиус апертуры,  $R_0$  — радиус проекции звезды

Если  $t_0$  — момент времени геометрического затмения для центра телескопа ( $x=0$ ) центра звезды, то в момент  $t$  центру телескопа будет соответствовать точка  $u(x)$  при  $x = V(t - t_0)$ .

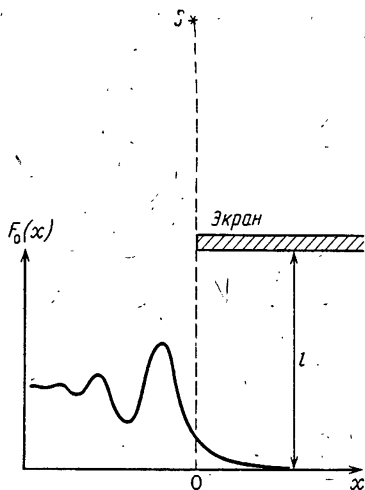


Рис. 2. При дифракции Френеля от точечного источника света  $S$  на плоском экране на принимающей поверхности имеем распределение интенсивности, описываемое функцией  $F_0(x)$ :  $x=0$  — проекция источника  $S$  на принимаемую поверхность,  $l$  — расстояние от экрана до этой поверхности

ются случайными величинами, для которых задается закон распределения. Исходя из физической постановки задачи, допустим, можно вычислить теоретическую кривую  $T(t_i, a)$  в данных точках  $t_i$ , зависящую от  $N$  параметров  $(a_1, \dots, a_N) = a$ . Для построения доверительной области  $D \subset R^N$  для  $a$  введем некоторую величину  $\Delta(a)$ , зависящую от  $u(t_i)$  и  $T(t_i, a)$ . Она является случайной величиной, закон распределения которой для истинных параметров можно найти. Задача построения доверительной области  $\mathcal{D} \subset R^N$  эквивалентна задаче проверки статистической гипотезы о том, что истинные параметры задачи равны заданным числам

$\bar{a}_1 = a_1, \dots, \bar{a}_N = a_N$ . Для нахождения области  $\mathcal{D}$  задаются некоторым уровнем значимости  $\gamma = 1 - \alpha$  и для каждого  $a \in R^N$  проверяют неравенство  $\Delta(a_1, \dots, a_N) \leq \Delta_0$ , где  $P(\Delta(a) > \Delta_0 | a_1 = \bar{a}_1, \dots, a_N = \bar{a}_N) = \alpha = 1 - \gamma$ ,  $\Delta_0$  — находится из статистических таблиц [11]. То значения  $a_1, \dots, a_N$ , для которых выполняется это неравенство, объединяются в доверительную область  $\mathcal{D} \subset R^N$ . Случайное множество  $\mathcal{D} \subset R^N$ , зависящее от экспериментальной кривой  $u(t_i)$ , с вероятностью  $\gamma$  накрывает истинные значения параметров.

Метод доверительных интервалов предполагает прямое построение доверительных областей, которые обычно строятся перебором в допустимой области параметров из  $R^N$ . Но даже на современных ЭВМ эффективно перебирать по параметрам оказывается возможным лишь при небольшом их количестве (порядка 3). Итак, этот метод накладывает определенные требования на скорость алгоритмов решения прямой задачи.

Заметим также, что, поскольку исходная задача неустойчива, для больших  $N$  необходимо сказывается некорректность, что приводит к очень большим доверительным интервалам для оцениваемых параметров. В ряде случаев, однако, ситуация существенно упрощается, например, когда некоторые из параметров входят линейно. Это будет показано ниже, на примере задачи покрытия.

Конечнопараметрическая модель задачи покрытия звезд Луной хорошо известна [1, 2], она основана на анализе дифракции Френеля света от удаленного источника (звезды) на плоском экране (крае Луны) и на предположении о линейном законе потемнения диска звезды.

Коротко остановимся на выводе выражения для теоретической дифракционной кривой. Как известно,

$$F_0(x) = H_0(xk(\lambda)) = \frac{I_0}{8} \{ [1 + 2c(xk(\lambda))]^2 + [1 + 2s(xk(\lambda))]^2 \}, \quad (1)$$

где

$$s(\omega) = \int_0^{\omega} \sin \frac{\pi t^2}{2} dt; \quad c(\omega) = \int_0^{\omega} \cos \frac{\pi t^2}{2} dt; \quad k(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}$$

$l$  — расстояние до Луны. Функция (1) описывает дифракцию Френеля от точечного источника света  $S$  интенсивности  $I_0$  и длины волны  $\lambda$  на плоском экране (рис. 2). Каждая хорда звезды, параллельная затмевающему краю Луны, создает на поверхности Земли дифракционную картину, описываемую функцией  $F_0(x)$ .

Распределение интенсивности излучения звезды  $F_1(x)$  в монохроматическом свете получается суммированием дифракции от хорд по всей звезде:

$$F_1(x) = \int_{-R_0}^{R_0} B(\zeta, R_0) F_0(x + \zeta) d\zeta$$

(координата  $x$  отсчитывается от проекции центра звезды на поверхность Земли). В предположении линейного закона потемнения стрип-распределение яркости по диску звезды выражается так:

$$B(\zeta, R_0) = P_1 \sqrt{R_0^2 - \zeta^2} + P_2 \frac{R_0^2 - \zeta^2}{R_0}, \quad (2)$$

где

$$P_1 = B_0 2(1 - m), \quad P_2 = B_0 \frac{m}{2} \frac{\pi}{R_0},$$

$R_0$  — радиус звезды,  $B_0$  — яркость в центре звезды,  $m$  — коэффициент потемнения в линейном законе потемнения.

Точно так же, усредняя дифракционную картину по всей апертуре принимающего телескопа, получим световой поток, регистрируемый телескопом  $F_2(x)$  ( $x$  — координата центра апертуры);

$$F_2(x) = \int_{-R_0}^{R_0} \sigma(y) F_1(x+y) dy,$$

где  $\sigma(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $R$  — радиус апертуры.

Беря в качестве  $t_0$  момент времени, в который край Луны находится точно между центрами звезды и телескопа, получим интенсивность излучения в момент времени  $t_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), усредненную по времени регистрации  $2\Delta t$ , при эффективной линейной скорости края Луны  $V$ :

$$F_3(t_i) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} F_2\{V(t_i - t_0 + \tau)\} d\tau = \int_{-V\Delta t}^{V\Delta t} F_2\{V(t_i - t_0) + z\} \frac{1}{V} dz,$$

где в последнем выражении сделана подстановка  $V\tau = z$ .

Поскольку прием излучения звезды производится не в монохроматическом свете, а для некоторого спектрального интервала  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , то окончательно на выходе системы в момент  $t_i$  будем иметь:

$$T(t_i) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda) d\lambda \int_{-V\Delta t}^{V\Delta t} \frac{1}{V} dz \int_{-R}^R \sigma(y) dy \int_{-R_0}^{R_0} B(\zeta, R_0) H_0\{V(t_i - t_0) + z + y + \zeta\} k(\lambda) d\zeta + L_0, \quad (3)$$

где  $E(\lambda)$  — распределение энергии в световом потоке, регистрируемом аппаратурой,  $L_0$  — фон неба. Функция  $E(\lambda)$  определяется следующими характеристиками:  $E_0(\lambda)$  — распределением энергии в спектре звезды,  $P(\lambda)$  — функцией пропускания земной атмосферы, зависящей от зенитного расстояния звезды,  $R(\lambda)$  — кривой реакции фотометрической системы, так что  $E(\lambda) = E_0(\lambda) P(\lambda) R(\lambda)$ .

Теоретическая дифракционная кривая (3) зависит от шести параметров:

$$T(t_i) = T(t_i; L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0).$$

Три из них входят линейно ( $L_0, P_1, P_2$ ), а три — нелинейно ( $V, t_0, R_0$ ). Таким образом, трудности, связанные с некорректностью исходной задачи, обходятся, так как число параметров невелико.

Будем предполагать, что ошибки в моменты времени  $t_i$  для экспериментальной дифракционной кривой  $u(t_i)$  распределены по нормальному закону с нулевым средним. Принято считать, что дисперсии  $\sigma_i^2$  ошибок наблюдений в моменты  $t_i$  пропорциональны величинам  $E^q(u(t_i))$ ,  $\sigma_i^2 = \sigma^2 E^q(u(t_i))$ ,  $q=0, 1, 2$  [12], где  $E(u(t_i))$  — математическое ожидание случайной величины  $u(t_i)$ . Значение параметра  $q$  определяется способом регистрации излучения. При  $q=0$  имеем ошибки, постоянные в шкале интенсивностей, а при  $q=2$  — ошибки, постоянные в шкале звездных величин. По экспериментальной кривой со случайными ошибками построим случайное доверительное множество  $\mathcal{D}$  в трехмерном пространстве параметров  $V, t_0, R_0$  с некоторым уровнем доверия  $\gamma = 1 - \alpha$ .

Отметим, что теоретическая кривая  $T(t_i)$  при больших значениях  $|t|$  содержит участки постоянства. Это позволяет, используя дальние области  $u_1(t_i)$  ( $M_1$  точек до затмения) и  $u_2(t_i)$  ( $M_2$  точек после затмения) экспериментальной кривой, независимо получить оценку  $\sigma^2$  для параметра  $\hat{\sigma}^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \left\{ \frac{1}{E^q(u_1(t_i))} \sum_{i=1}^{M_1} (u_1(t_i) - \bar{u}_1)^2 + \frac{1}{E^q(u_2(t_i))} \sum_{i=1}^{M_2} (u_2(t_i) - \bar{u}_2)^2 \right\} \frac{1}{M_1 + M_2 - 2}, \quad (4)$$

где

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} u_1(t_i), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} u_2(t_i),$$

$\hat{\sigma}^2$  имеет распределение  $\sigma^2 \chi^2_{M_1+M_2-2} [10]$ .

Для построения  $\mathcal{D}$  введем случайную величину  $\Delta(V, t_0, R_0)$ :

$$\Delta = \Delta(V, t_0, R_0) = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{k=1}^M \frac{1}{E^q(u(t_k))} \times \\ \times (u(t_k) - T(t_k; \hat{L}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, V, t_0, R_0))^2 \frac{M_1 + M_2 - 2}{M - 3}. \quad (5)$$

Суммирование проводится по  $M$  точкам экспериментальной кривой, включающим участок дифракции;  $L_0, P_1, P_2$  — значения линейных параметров, при которых достигается своего минимума по  $L_0, P_1, P_2$  при фиксированных  $V, t_0, R_0$  квадратичная форма

$$s = s(L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{E^q(u(t_k))} \times \\ \times (u(t_k) - T(t_k; L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0))^2. \quad (6)$$

Случайная величина  $\Delta(V, t_0, R_0)$  при истинных параметрах имеет распределение Фишера  $\mathcal{F}_{M-3, M_1+M_2-2}$  [10].

Практически величины  $E(u(t_i)), E(u_1(t_i)), E(u_2(t_i))$  не известны, но в случае достаточно больших  $M_1$  и  $M_2$  и точных наблюдений их хорошей оценкой могут служить соответственно  $u(t_i), \bar{u}_1(t_i), \bar{u}_2(t_i)$ . Поэтому мы традиционно будем вместо величин  $E(u(t_i)), E(u_1(t_i)), E(u_2(t_i))$  использовать их оценки.

Зададимся величиной  $0 < \gamma = 1 - \alpha < 1$ . Пользуясь таблицами распределения Фишера, можно найти такое число  $\Delta_0$ , что вероятность того, что случайная величина  $\Delta(V, t_0, R_0)$  (5) при истинных параметрах  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$  больше  $\Delta_0$ , будет равна  $\alpha$ :

$$P(\Delta(V, t_0, R_0) > \Delta_0 | V = \bar{V}, t_0 = \bar{t}_0, R_0 = \bar{R}_0) = \alpha.$$

В качестве доверительного множества  $\mathcal{D} \subset R^3$  для  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$  [10] возьмем совокупность тех точек в  $R^3$ , для которых  $\Delta(V, t_0, R_0) \leq \Delta_0 = \mathcal{F}_{M-3, M_1+M_2-2, \alpha}$ . Таким образом, наша случайная область  $\mathcal{D}$  с вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  накроет истинные значения  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$ , т. е. будет иметь уровень доверия  $\gamma$ . Значит, для построения области  $\mathcal{D}$  достаточно уметь минимизировать квадратичную форму  $s$  (6) по  $L_0, P_1, P_2$  при любых значениях  $V, t_0, R_0$ . Минимизация по линейным параметрам  $L_0, P_1, P_2$  осуществляется элементарно.

Заметим, что если множество  $\mathcal{D}$  не пусто, то оно содержит точку  $\bar{R}_0, \bar{V}, \bar{t}_0$ , в которой достигается абсолютного минимума квадратичная форма  $s$ , тогда  $\bar{R}_0, \bar{V}, \bar{t}_0$  — это оценка метода наименьших квадратов для  $R_0, V, t_0$ , которую можно принять за приближенные значения параметров. Размеры  $\mathcal{D}$  дают величину ошибок параметров.

Таким образом, задача нахождения доверительной области  $\mathcal{D} \subset R^3$  для  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$  сведена к задаче нахождения  $s(L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0)$  (6) в допустимой области пространства  $R^3$  нелинейных параметров  $V, t_0, R_0$ . Если вычисление с нужной точностью на ЭВМ  $S(L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0)$  при фиксированных  $V, t_0, R_0$  требует достаточно большого машинного времени, то перебирать по трем параметрам — довольно трудоемкий процесс. Ниже приводится алгоритм, эффективно решающий эту задачу.

Сделаем ряд преобразований над  $T(t_i; L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). В выражении (3) поменяем порядок интегрирования:

$$T(t_i) = \frac{1}{V} \int_{-R_0}^{R_0} B(\zeta R_0) d\zeta \int_{-R}^R \sigma(y) dy \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda) d\lambda \times \\ \times \int_{-V\Delta t}^{V\Delta t} H_0\{(V(t_i - t_0) + z + y + \zeta)k(\lambda)\} dz + L_0. \quad (7)$$

Интеграл по  $z$  находится аналитически:

$$\int_{-V\Delta t}^{V\Delta t} H_0\{(V(t_i - t_0) + y + \zeta + z)k\} dz = \\ = \frac{1}{k} G_0\{(V(t_i - t_0) + y + \zeta + z)k\} \Big|_{-V\Delta t}^{V\Delta t},$$

где

$$G_0(x) = \int H_0(x) dx = \frac{I_0}{8} \left[ 2x + 4xc(x) - 4 \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x^2}{2} + 4xs(x) + \right. \\ \left. + 4 \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi x^2}{2} + 4xc^2(x) - 4 \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x^2}{2} c(x) + 4 \frac{1}{\sqrt{2}\pi} s(\sqrt{2}x) + \right. \\ \left. + 4xs^2(x) + 4 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x^2}{2} s(x) - 4 \frac{1}{\pi\sqrt{2}} s(x\sqrt{2}) \right]. \quad (8)$$

В интеграле (7) возьмем следующий интеграл по  $\lambda$ :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{k(\lambda)} [G_0\{(V(t_i - t_0 + \Delta t) + y + \zeta)k(\lambda)\} - \\ - G_0\{(V(t_i - t_0 - \Delta t) + y + \zeta)k(\lambda)\}] E(\lambda) d\lambda = \\ = G_1(V(t_i - t_0 + \Delta t) + y + \zeta) - G_1(V(t_i - t_0 - \Delta t) + y + \zeta),$$

где

$$G_1(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda l}{2}} G_0\left(x \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda l}}\right) E(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

находится численным интегрированием по  $\lambda$ . В выражении (7) следующий интеграл по  $y$  равен

$$\int_{-R}^R \sigma(y) \{G_1(V(t_i - t_0 + \Delta t) + y + \zeta) - G_1(V(t_i - t_0 - \Delta t) + y + \zeta)\} dy = \\ = G_2(V(t_i - t_0 + \Delta t) - \zeta) - G_2(V(t_i - t_0 - \Delta t) - \zeta),$$

где

$$G_2(x) = \int_{-R}^R \sigma(y) G_1(x + y) dy \quad (10)$$

также находится численным интегрированием по  $y$ . Заметим, что  $G_2(x)$  не зависит от параметров задачи. Таким образом, используя выражение (2) для  $B(\zeta, R_0)$ , имеем

$$T(t_i; L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0) = \frac{1}{V} \int_{-R_0}^{R_0} B(\zeta, R_0) \times \\ \times \{G_2(V(t_i - t_0 + \Delta t) + \zeta) - G_2(V(t_i - t_0 - \Delta t) + \zeta)\} d\zeta + L_0 = \\ = P_1 T_1(t_i; V, t_0, R_0) + P_2 T_2(t_i; V, t_0, R_0) + L_0,$$

где

$$T_1(t_i; V, t_0, R_0) = \frac{1}{V} \{G_3(V(t_i - t_0 + \Delta t); R_0) - \\ - G_3(V(t_i - t_0 - \Delta t); R_0)\}, \quad (11)$$

$$T_2(t_i; V, t_0, R_0) = \frac{1}{V} \{G_4(V(t_i - t_0 + \Delta t); R_0) - \\ - G_4(V(t_i - t_0 - \Delta t); R_0)\},$$

$G_3(x; R_0)$  и  $G_4(x; R_0)$  зависят только от параметра  $R_0$  исходной задачи и находятся численным интегрированием по формулам

$$G_3(x; R_0) = \int_{-R_0}^{R_0} \sqrt{R_0^2 - \zeta^2} G_2(x + \zeta) d\zeta, \\ G_4(x; R_0) = \int_{-R_0}^{R_0} \frac{R_0^2 - \zeta^2}{R_0} G_2(x + \zeta) d\zeta. \quad (12)$$

Таким образом, приведенные выкладки показывают, как можно осуществить эффективный алгоритм перебора нелинейных параметров. Резюмируем сказанное.

1) При фиксированном значении  $R_0$ , вычислив заранее по формулам (8), (9), (10) функцию  $G_2(x)$ , определяем  $G_3(x; R_0)$  и  $G_4(x; R_0)$  по (12).

2) Пользуясь полученными  $G_3(x; R_0)$  и  $G_4(x; R_0)$ , находим функции  $T_1(t_i; V, t_0, R_0)$  и  $T_2(t_i; V, t_0, R_0)$  при произвольных значениях  $V$  и  $t_0$ , что не представляет трудностей (см. формулу (11)).

3) Минимизируем квадратичную форму  $s$  (6) по линейным параметрам  $L_0, P_1, P_2$ .

Поскольку физический смысл имеют лишь положительные значения  $L_0, P_1, P_2$ , то минимизацию  $s$  следует проводить по множеству  $L_0 \geq 0, P_1 \geq 0, P_2 \geq 0$ , что можно осуществить различными методами [14]. В ряде случаев удается с хорошей точностью заранее указать коэффициент потемнения  $m$ , используя спектральный класс звезды.



Нами был апробирован метод доверительных интервалов в модельной задаче покрытия звезды Луной. В качестве экспериментальной кривой  $u(t_i)$  была взята теоретическая кривая  $T(t_i; \bar{L}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0)$  в точках  $t_i$  при фиксированных параметрах  $\bar{L}_0=2, \bar{P}_1=1, \bar{P}_2=0, \bar{V}=700, \bar{t}_0=80 \cdot 10^{-3}, \bar{R}_0=2,5$  и с наложенным на кривую шумом в каждой точке  $t_i$ . Шум брался независимый, нормально распределенный, с нулевым средним и дисперсией, равной  $\sigma_i^2 = T(t_i; \bar{L}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0) \cdot \sigma^2$ , где  $\sigma^2 = 9 \cdot 10^{-4}$ . Известные параметры задачи в соответствии с реальным экспериментом брались равными:  $R=0,24, l=3,64825 \cdot 10^8, \lambda_1=6250, \lambda_2=7750, \Delta t=2 \cdot 10^{-3}, E(\lambda)=1$ . Доверительную область строили для нелинейных параметров  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$ , используя случайную величину  $\Delta(V, t_0, R_0)$  из формулы (5) ( $M_1=35, M_2=25$ ) с минимизацией по линейным параметрам на множестве  $L_0 \geq 0, P_1 \geq 0, P_2 \geq 0$ .

Зададимся уровнем доверия  $\gamma=0,6$ , тогда соответствующее  $\Delta_0$  находится из статистических таблиц  $\Delta_0=1,03$  [11]. Доверительная область состоит из тех значений параметров  $V, t_0, R_0$ , для которых  $\Delta(V, t_0, R_0) \leq \Delta_0$ , или, эквивалентно,  $\frac{s(L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0)}{M-3} \leq s_0 = 9,3 \cdot 10^{-4}$ . Модельная задача решалась  $N_0=100$  раз. Случайная доверительная область  $\mathcal{D} \subset R^3$  с уровнем доверия  $\gamma=0,6$  накрыла истинные значения параметров  $\bar{V}, \bar{t}_0, \bar{R}_0$  в  $N_1=62$  случаях из  $N_0=100$ .

Приведем один из модельных результатов. Изобразить на бумаге полученные трехмерную область  $\mathcal{D}$  и график зависимости квадратичной формы  $\frac{s(L_0, P_1, P_2, V, t_0, R_0)}{M-3}$  (где  $s^*$ ) задается формулой (6) в зависимости от трех параметров  $V, t_0, R_0$  не представляется возможным. Кривая 1 на рис. 3 соответствует сечению этого графика, проходящему через область  $\mathcal{D}$  при некоторых фиксированных  $V, t_0$ . Через  $\mathcal{D}'=(1,25; 3,2)$  обозначен полученный доверительный интервал для  $\bar{R}_0$  в данном сечении. Взяв габариты доверительной области  $\mathcal{D}$ , мы здесь можем указать лишь верхние оценки, для области  $\mathcal{D}$ :  $R_0 \in (1,25; 3,2); V \in (687; 716); t_0 \in (73; 85) \cdot 10^{-3}$ . Функция  $s(\bar{L}_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, V, t_0, R_0)$  имеет минимум при  $\bar{R}_0=2,2, \bar{V}=703; \bar{t}_0=78 \cdot 10^{-3}$ , что служит точечной оценкой параметров методом наименьших квадратов. Кривые 2 и 3 показывают модельные результаты при фиксированных коэффициентах потемнения  $m=0$  и  $m=1$  соответственно.

В качестве примера рассмотрим обработку дифракционной кривой от затмения Луной звезды 618' Tau. Экспериментальная кривая была получена на базе аппаратного комплекса «Электрофотометр-ЭВМ», установленного в Высокогорной тьянь-шаньской экспедиции ГАИШ близ Алма-Аты [13]. Лунный край проходит

\* Величина  $s$  считалась на  $M=50$  точках, не включающих концы теоретической дифракционной кривой, где она выходит на константу.

первую зону Френеля за время порядка 20—40 мс. Поэтому для проведения наблюдений покрытий была создана система регистрации электрофотометрических данных наблюдений с временным

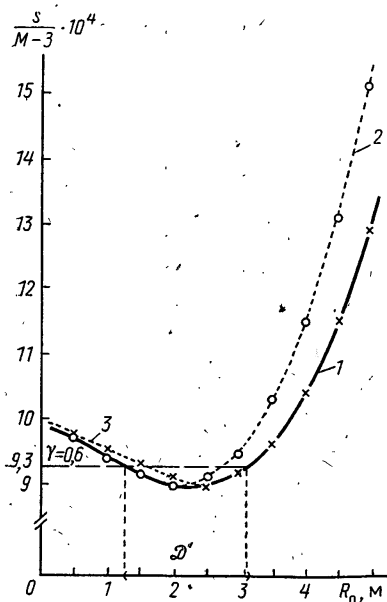


Рис. 3. Изобразить график функции  $\frac{s(V, t_0, R_0)}{M-3}$  невозможно, поэтому кривая 1 изображает сечение  $\frac{s(R_0)}{M-3}$  в модельной задаче при фиксированных  $V=700$  м/с;  $t_0=80 \cdot 10^{-3}$  с;  $D'$  — доверительный интервал в данном сечении при уровне доверия  $\gamma=0,6$ ; 2, 3 — зависимость  $\frac{s(R_0)}{M-3}$  при фиксированных  $m=0, m=1$

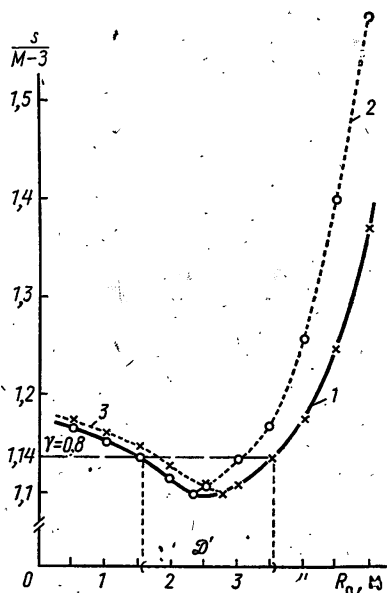


Рис. 4. Рисунок относится к решавшейся реальной задаче и вполне соответствует рис. 3 для модельной задачи. Кривая 1 изображает зависимость  $\frac{s(V, t_0, R_0)}{M-3}$  при фиксированных  $V=726$  м/с;  $t_0=78,4 \cdot 10^{-3}$  с;  $D'$  — доверительный интервал в данном сечении при уровне доверия  $\gamma=0,8$ ; 2, 3 — зависимость  $\frac{s(V, t_0, R_0)}{M-3}$  при фиксированных  $m=0, m=1$

разрешением  $10^{-3}$  с. Данные фотометрических наблюдений регистрируются в реальном времени с нулевой скважностью. Наблюдения проводятся в кассегреневском фокусе телескопа АЗТ-14 (радиус главного зеркала  $R=24$  см).

При регистрации дифракционной кривой для уменьшения шумов, вызванных рассеянным светом от Луны, производится регистрация закрытия или открытия звезд только темным краем Луны. Для тех же целей стараются уменьшить влияние фона неба, для чего диафрагма электрофотометра в кассегреневском фокусе те-

лескопа уменьшается до размеров, вмещающих лишь турбулентный диск звезды. При обработке экспериментальной кривой для уменьшения шума каждые две последовательные точки были сложены, чтобы получить соответствие времени накопления сигнала  $\Delta t = 2$  мс.

Поскольку расчеты выполнялись в основном с методической целью, распределение энергии в спектре звезды было взято в виде планковского:

$$E(\lambda) = K \frac{1}{\lambda^3 \left[ \exp \frac{31,9884}{\lambda} - 1 \right]}$$

при температуре  $T = 4500$  К. Функции пропускания земной атмосферы и реакции фотометрической системы взяты равными 1 ( $P(\lambda) = 1, R(\lambda) = 1$ ), интервалы длин волн в спектре принимаемого излучения — от  $\lambda_1 = 6250$  Å до  $\lambda_2 = 7750$  Å. Расстояние от телескопа до края Луны было предвычислено для данного эксперимента и оказалось равным  $l = 3,64825 \cdot 10^8$ . Оценка дисперсии  $\sigma^2$  (из (4))

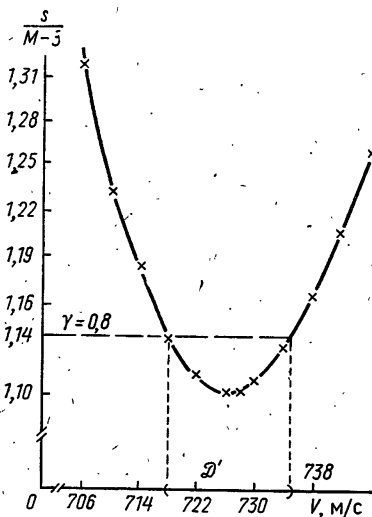


Рис. 5. При фиксированных  $R_0 = 2,8$  м,  $t_0 = 78,4 \cdot 10^{-3}$  с имеем сечение  $\frac{s}{M-3}$  в функции от  $V$  — эффективной скорости затмевающего края Луны:  $D'$  — доверительный интервал с уровнем  $\gamma = 0,8$  для  $V$  при фиксированных  $R_0, t_0$ .  $D'$  существенно зависит от выбранного сечения

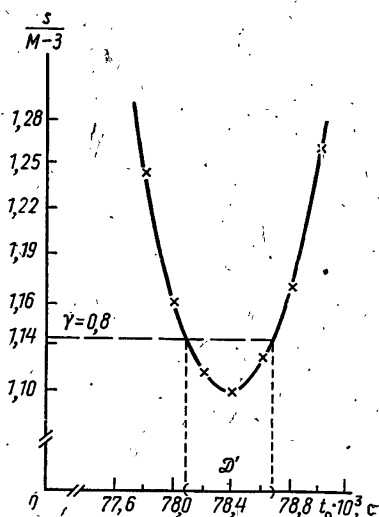


Рис. 6. Приведенный график соответствует сечению  $\frac{s}{M-3}$  при  $R_0 = 2,8$  м,  $V = 726$  м/с:  $t_0$  — относительное время, прошедшее после первой из обрабатываемых нами точек экспериментальной кривой:  $D'$  — доверительный интервал с уровнем  $\gamma = 0,8$  для  $t_0$  при данных  $R_0, V$ , как и для  $V$ .  $D'$  существенно зависит от выбранного сечения

проводилась по  $M_1=35$ ,  $M_2=25$  точкам с  $q=1$  и оказалась равной  $\hat{\sigma}^2=0,939$ .

На рис. 4, как и в модельной задаче, кривая 1 соответствует сечению графика функции  $\frac{s(\hat{L}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, V, t_0, R_0)}{M-3}$  при фиксированных  $V, t_0$ , проходящему через доверительную область  $D$ .

Аналогичные зависимости от параметров  $V$  и  $t$  приведены на рис. 5 и 6. Анализ функции  $s(\hat{L}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, V, t_0, R_0)$  показывает, что при уровне  $\gamma=0,8$  верхняя оценка доверительной области для нелинейных параметров есть  $R_0 \in (1,55; 3,55)$ ;  $V \in (710; 739)$ ;  $t_0 \in (77,8; 79,1) \cdot 10^{-3}$ . Минимум достигается при  $R_0=2,8$  м,  $V_0=726$  м/с,  $t_0=78,4 \cdot 10^{-3}$  с, что может служить оценкой для параметров. Кривые 2 и 3 на рис. 4 соответствуют результатам при фиксированных коэффициентах потемнения  $m=0$ ,  $m=1$ .

Таким образом, приведенный в данной статье алгоритм позволяет осуществлять эффективный поиск параметров при интерпретации дифракционных кривых покрытий звезд Луной и давать надежные оценки ошибок этих параметров.

Приведем еще один класс конечнопараметрических задач астрофизики — обратных задач теории классических затменных двойных систем. Системы затменных двойных звезд являются единственными астрономическими объектами, позволяющими надежно определить абсолютные характеристики составляющих звезд — массы, радиусы, светимости.

Рассмотрим обратную задачу определения геометрических параметров двойной затменной системы, т. е. относительных радиусов компонент и угла наклона орбиты к лучу зрения, по наблюдаемой кривой блеска. Будем использовать модель двух сферических звезд, вращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Эффектами эллипсоидальности и отражения, характерными для тесных двойных систем, мы будем пренебрегать. Расстояние между компонентами системы примем равным 1. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы соответственно первой и второй компонент. Угол между лучом зрения и нормалью к плоскости вращения обозначим  $i$ . Будем предполагать, что для обеих компонент двойной системы применим линейный закон потемнения излучения к краю, т. е. если  $\xi$  — расстояние от точки на видимом диске звезды до его центра, то интенсивность излучения в направлении на Землю в этой точке равна

$$J_p(\xi) = J_p^0(1 - u_p + u_p \sqrt{1 - \xi^2/R_p^2}), \quad p=1, 2. \quad (13)$$

Здесь  $u_p$ ,  $p=1, 2$ , — коэффициенты потемнения к краю звездного диска для обеих компонент. Будем считать атмосферы обеих звезд двойной системы тонкими, т. е. с точки зрения поглощающих свойств обе звезды представляют собой непрозрачные шары с радиусами соответственно  $R_1$  и  $R_2$ . Тогда если для системы выполнено условие  $\cos i \leq R_1 + R_2$ , то в процессе вращения одна компонента будет затмевать другую и наблюдаемый на Земле суммарный

блеск обеих компонент будет изменяться со временем. Таким образом, наблюдаемая кривая блеска является функцией геометрических параметров системы  $R_1, R_2, i$ , коэффициентов потемнения  $u_1, u_2$  и значений центральных светимостей  $J_1^0$  и  $J_2^0$ .

Будем считать кривые блеска двойной системы нормированными на 1, т. е. в фазах вне затмений блеск системы  $l$  равен 1. Записывая выражения для блеска компонент, получим условие нормировки в следующем виде:

$$2\pi \int_0^{R_1} J_1(\xi) \xi d\xi + 2\pi \int_0^{R_2} J_2(\xi) \xi d\xi = 1. \quad (14)$$

Обозначим область перекрытия дисков компонент в фазе  $\omega t$  через  $S(\omega t)$ . Тогда потеря блеска системы в каждом минимуме будет описываться выражением

$$1 - l^{(p)}(\omega t) = \iint_{S(\omega t)} J_p(\xi_p) d\sigma, \quad p = 1, 2.$$

Здесь  $l^{(p)}(\omega t)$  — блеск системы в минимуме, соответствующем затмению  $p$ -й компоненты. Поскольку мы предполагаем, что  $J_p(\xi)$  представима в виде (13), то, обозначая  $X_0^{(p)} = J_p^0(1 - u_p)$ ,  $X_1^{(p)} = J_p^0 u_p$ , получим

$$1 - l^{(p)}(\omega t) = X_0^{(p)} \iint_{S(\omega t)} d\sigma + X_1^{(p)} \iint_{S(\omega t)} \sqrt{1 - \frac{\xi_p^2}{R_p^2}} d\sigma. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что

$$\iint_{S(\omega t)} d\sigma = 2 \int_{R_{\min}^{(p)}(\omega t)}^{R_{\max}^{(p)}(\omega t)} \varphi_0^{(p)}(\xi_p, \omega t) \xi_p d\xi_p, \quad (16)$$

$$\iint_{S(\omega t)} \sqrt{1 - \frac{\xi_p^2}{R_p^2}} d\sigma = 2 \int_{R_{\min}^{(p)}(\omega t)}^{R_{\max}^{(p)}(\omega t)} \varphi_0(\xi_p, \omega t) \sqrt{1 - \frac{\xi_p^2}{R_p^2}} \xi_p d\xi_p,$$

где

$$\varphi_0^{(p)}(\xi, \omega t) = \begin{cases} \arccos \frac{\Delta^2(\omega t) + R_p^2 - \xi^2}{2\xi R_p}, & \text{если } \frac{\Delta^2(\omega t) + R_p^2 - \xi^2}{2\xi R_p} \leq 1, \\ \pi, & \text{в противоположном случае,} \end{cases} \quad (17)$$

$$R_{\min}^{(1)} = \max\{0, \Delta(\omega t) - R_2\}, \quad R_{\max}^{(1)} = \min\{R_1 \Delta(\omega t) + R_2\},$$

$$R_{\min}^{(2)} = \max\{0, \Delta(\omega t) - R_1\}, \quad R_{\max}^{(2)} = \min\{R_2, \Delta(\omega t) + R_1\},$$

$$\Delta^2(\omega t) = \cos^2 i + \sin^2 \omega t.$$

Пользуясь формулами (15)—(17) и задаваясь геометрическими параметрами  $R_1$ ,  $R_2$  и  $i$ , а также  $X_1^{(p)}$  и  $X_0^{(p)}$  можно вычислить блеск двойной системы в любой фазе  $\omega t$ , а именно:

$$l^{(p)}(\omega t) = 1 - X_0^{(p)} H_0^{(p)}(\omega t) - X_1^{(p)} H_1^{(p)}(\omega t),$$

где  $H_0^{(p)}$  и  $H_1^{(p)}$ ,  $p=1, 2$ , выписываются в явном виде в виде квадратур (16). Обозначим теперь

$$a_p = 2\pi \int_0^{R_p} \xi d\xi, \quad b_p = \frac{2}{3} a_p = 2\pi \int_0^{R_p} \xi \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R_p^2}} d\xi.$$

Тогда условие нормировки (14) запишется в виде

$$a_1 X_0^{(1)} + b_1 X_1^{(1)} + a_2 X_0^{(2)} + b_2 X_1^{(2)} = 1. \quad (18)$$

Блеск системы можно теперь записать в следующем виде:

$$l^{(1)}(\omega t) = P^{(1)}(\omega t) X_0^{(1)} + Q^{(1)}(\omega t) X_1^{(1)} + a_2 X_0^{(2)} + b_2 X_1^{(2)}, \quad (19)$$

$$l^{(2)}(\omega t) = a_1 X_0^{(1)} + b_1 X_1^{(1)} + p^{(2)}(\omega t) X_0^{(2)} + Q^{(2)}(\omega t) X_1^{(2)},$$

где

$$p^{(p)}(\omega t) = a_p - H_0^{(p)}(\omega t), \quad \text{а} \quad Q^{(p)}(\omega t) = b_p - H_1^{(p)}(\omega t).$$

Таким образом, блеск двойной системы является линейной функцией величин  $X_0^{(p)}$ ,  $X_1^{(p)}$ ,  $p=1, 2$ , с коэффициентами, зависящими от  $R_1$ ,  $R_2$  и  $i$ .

Пусть блеск системы  $l(\omega t)$  измеряется в некоторых фазах  $\{\omega t_k\}_{k=1}^M$ . Значение  $l(\omega t)$  в каждой фазе измеряется многократно. Пусть число измерений блеска в фазе  $\omega t_k$  есть  $N_k$ . Как и в задаче покрытия звезд Луной, будем считать, что при измерении блеска систематические ошибки отсутствуют, а случайные ошибки распределены нормально. В данном случае способ регистрации излучения таков, что дисперсии  $\sigma_k^2$  ошибок наблюдений в фазах  $\omega t_k$  пропорциональны квадратам истинных значений блеска  $l_k$  системы в соответствующих фазах,  $\sigma_k^2 = l_k^2 \sigma^2$  (дисперсия постоянна в шкале звездных величин).

Будем обозначать через  $X$  совокупность значений параметров  $X_0^{(p)}$  и  $X_1^{(p)}$ ,  $p=1, 2$ . Пусть  $\xi_k^j$  — значения  $j$ -го измерения ( $j=1, N_k$ ) кривой блеска в фазе  $\omega t_k$  независимо от того, к какому из двух минимумов они относятся. Пусть  $l_k(X, R_1, R_2, i)$  — величина теоретического блеска модельной системы в фазе  $\omega t_k$  при геометрии  $R_1, R_2, i$  и параметрах  $X$ , вычисляемая по формулам (19).

Пусть всего исследуется  $M$  фаз. Рассмотрим случайную величину

$$\Delta = \frac{\sum_{k=1}^M \frac{N_k}{l_k^2} (\bar{\xi}_k - l_k(X, R_1, R_2, i))^2}{\sum_{k=1}^M \frac{N_k(N_k - 1)}{l_k^2} \sigma_k^2} \frac{N - M}{M - 3},$$

где  $\bar{\xi}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_k^j$  — нормальные точки;  $\sigma_k^2 = \frac{1}{N_k(N_k - 1)} \sum_{j=1}^{N_k} (\xi_k^j - \bar{\xi}_k)^2$  —

оценки дисперсий нормальных точек;  $N = \sum N_k$  — полное число измерений;  $X$  — значения линейных параметров  $X$ , при которых достигает своего минимума по  $X$  квадратичная форма

$$s = \sum_{k=1}^M \frac{N_k}{l_k^2} (\bar{\xi}_k - l_k(X, R_1, R_2, i))^2 \quad (20)$$

при выполнении условия нормировки (18).

Случайная величина  $\Delta$  имеет распределения Фишера  $\mathcal{F}_{M-3, N-M}$  (10). Степень свободы  $M-3$  этого распределения, так же как и множитель  $M-3$  в выражении для  $\Delta$ , обусловлена минимизацией квадратичной формы  $s$  на трехмерном подпространстве, а степень свободы  $N-M$  и множитель  $N-M$  — тем, что знаменатель выражения для  $\Delta$  зависит от  $N$  случайных величин  $z_k^j = (\xi_k^j - \bar{\xi}_k)$ , связанных  $M$  соотношениями  $\sum_{j=1}^{N_k} z_k^j = 0$ .

Зададимся величиной  $0 < \gamma = 1 - \alpha < 1$ . Как и в задаче покрытия звезд Луной, найдем теперь доверительное множество  $\mathcal{D} \subset R^3$  тех совокупностей параметров  $R_1, R_2$  и  $i$ , для которых  $\Delta \leq \mathcal{F}_{M-3, N-M, \alpha}$ . Таким образом, для построения доверительного множества  $\mathcal{D}$  достаточно уметь минимизировать квадратичную форму (20) при условии (18) по  $X_0^{(p)}$  и  $X_1^{(p)}$  при любых значениях  $R_1, R_2$  и  $i$ . Тогда перебором значений  $R_1, R_2$  и  $i$  можно построить доверительное множество для этих параметров.

Задача минимизации квадратичной формы (20) при условии (18) легко может быть решена, если из (18) выразить один параметр, например  $X_0^{(1)}$ , через остальные, подставить в выражение (20) и затем найти его безусловный минимум по трем остальным параметрам.

В качестве примера рассмотрим обработку кривых блеска для системы YZ Cas [15]. Оценки дисперсий средних в шкале звездных величин равны  $1,77 \cdot 10^{-6}$ ,  $N_k = 12$ . Число рассматриваемых фаз  $M = 42$ . Задавая уровнем доверия  $\gamma = 0,5$ , находим  $\mathcal{F}_{39; 462; 0,5} = 1,0$ , т. е. доверительное множество  $\mathcal{D}$  состоит из тех  $R_1, R_2, i$ , для которых  $\Delta \leq 1,0$ , или, что то же самое,  $d \leq 5,9 \cdot 10^{-5}$ , где

$$d = \sqrt{\sum_{k=1}^M \frac{1}{l_k^2} (\bar{\xi}_k - l_k(\bar{X}, R_1, R_2, i))^2}$$

Анализ поведения функции  $d(R_1, R_2, i)$  показывает, что она достигает своего минимального значения  $d_{\min} = 4,4 \cdot 10^{-5}$  при  $R_1 = 0,1440$ ,  $R_2 = 0,0755$ ,  $i = 88,3^\circ$ . Эти значения могут быть приняты в качестве приближенных значений истинных параметров системы. Простой перебор значений геометрических параметров показал, что доверительные интервалы для каждого из них:

$$i \in [88,05; 88,55], \quad R_1 \in [0,143; 0,145], \quad R_2 \in [0,075; 0,0762]$$

В работе Крона были указаны ошибки измерения:  $i = 88,18 \pm 0,057$ ,  $R_1 = 0,1443 \pm 0,00046$ ,  $R_2 = 0,0756 \pm 0,00015$ . Видно, что приближенные методы оценки ошибок, основанные на линеаризации, дают существенно заниженные значения ошибок определения геометрических параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Evans D. S. — *Highlight of Astronomy*, 1971, 2, 601.
2. Ridgway S. T. *Thes of 3-rd Symp. on Recent Adv. Observ. Astron.* — Mexico: Ensenada, 1981, p. 81.
3. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1963, т. 151, с. 501.
4. Тихонов А. Н. — ДАН СССР, 1963, т. 153, с. 49.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* — М.: Наука, 1979.
6. Гончарский А. В., Степанов В. В. — *Астрон. циркуляр*, 1981, № 1175.
7. Балог Н. И., Гончарский А. В., Черепашук А. М. — *Астрон. журн.*, 1981, т. 58, с. 61.
8. Балог Н. И., Гончарский А. В., Черепашук А. М. — *Письма в Астрон. журн.*, 1981, т. 7, с. 605.
9. Балог Н. И., Гончарский А. В., Хрузина Т. С., Черепашук А. М. — *Астрон. журн.*, 1983, т. 60, с. 534.
10. Уилкс С. *Математическая статистика.* — М.: Мир, 1967.
11. Худсон Д. *Статистика для физиков.* — М.: Мир, 1970.
12. Linnel A. P., Proctor D. D. — *Astrophys. J.*, 1970, v. 162, p. 683.
13. Корнилов В. Г., Миронов А. В., Трунковский Е. М., Халиуллин Х. Ф., Черепашук А. М. — *Астрон. журн.*, 1984, т. 61, с. 4.
14. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. *Численные методы в экстремальных задачах.* — М.: Наука, 1975.
15. Крон J. E. — *Astrophys. J.*, 1942, v. 96, p. 173.

**А. И. Гребенников**

## О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ ЯВНЫХ АППРОКСИМИРУЮЩИХ СПЛАЙНОВ

### § 1. Введение

Для широкого класса некорректных задач, сводящихся к решению интегрального уравнения I рода,



успешно применяется метод регуляризации Тихонова [1], а также принципиально сводящиеся к нему другие методы [2, 3]. Эти методы характерны тем, что приводят к решению уравнения Эйлера некоторой вариационной задачи, зависящей от числового параметра  $\alpha$ . При дискретизации это приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений. А так как параметр  $\alpha$ , от которого она зависит, находится методом последовательных приближений в зависимости от погрешности входных данных, то решение системы приходится проводить многократно. Матрица системы в общем случае вычисляется через значения оператора  $A^*A$ . Таким образом, для реализации метода требуется значительный объем вычислений.

Актуальной является проблема построения методов и алгоритмов регуляризации, требующих меньших вычислительных затрат. В работе [4] автором предложен новый подход к решению некоторых классов некорректных задач. Сформулирован общий метод и развита соответствующая теория, обосновывающая регуляризирующие свойства метода для случая операторов  $A$ , переводящих множество функций конечной гладкости в множество функций большей конечной гладкости. В частности, рассмотрены задачи численного дифференцирования функций по их дискретным значениям и решения интегральных уравнений с особенностями.

Суть метода состоит в предварительном сглаживании правой части уравнения (1°) и последующем обращении оператора  $A$ , если это просто реализуется (как, например, в задаче численного дифференцирования), либо решении операторного уравнения со сглаженной правой частью методом сплайн-коллокации. Сглаживание функций, заданных дискретно, осуществляется, как правило, с помощью регуляризованных по Тихонову сплайнов [5—7], что опять-таки приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений, порядок которой пропорционален объему входных данных. При этом также необходимо выбирать параметр регуляризации  $\alpha$  и решать эту систему неоднократно. Это требует существенных вычислительных затрат, особенно в случае функций нескольких переменных.

Центральным моментом в работе [4] является то, что сглаживание предлагается проводить другими, быстрыми, методами, в частности с помощью явных аппроксимирующих сплайнов [8], не требующих решения систем уравнений. Регуляризирующий эффект при решении задачи (1°) в целом достигается при неоднократном применении явных сглаживающих формул и правильном выборе числа сглаживаний в зависимости от точности входных данных. В [4] дано обоснование выбора числа сглаживаний из принципа минимума мажорантной оценки и из принципа невязки для сглаживающих операторов общего вида. Отметим, что в [7, 9, 10] рассмотрены некоторые формулы локального сглаживания. В [10] указывается, что их можно применять многократно, однако ана-

лиз этого процесса не проведен, как не решен и вопрос о выборе числа сглаживаний, обеспечивающем регулирующие свойства метода.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании формул для регулирующих алгоритмов на основе полиномиальных сплайнов, конкретизации теорем о выборе числа сглаживаний.

## § 2. Метод последовательных сглаживаний с помощью явной сплайн-аппроксимации

Пусть на отрезке  $[0, l]$  действительной оси задана сетка  $\{x_i\}_{i=1}^N$ :  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N = l$ ; функция  $f(x)$  задана своими значениями  $f_i = f(x_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Введем нормализованные полиномиальные степени  $n$  локальные базисные сплайны  $s_{i,n}(x)$ , построенные по узлам  $\xi_i, \dots, \xi_{i+n+1}$ , где  $\xi_i = x_i$  при нечетном  $n$ ,  $\xi_i = (x_i + x_{i-1})/2$  — при четном  $n$  [10].

Методом последовательных сглаживаний с помощью явных сплайн-аппроксимаций назовем построение функции  $S_K(x)$  по формуле

$$S_K(x) = \sum_{i=-n_1+1}^{N+n_1-1} \left( \sum_{j=-p}^p c_{i,j} S_{K-1}(x_{i+j}) \right) s_{i-n_1,n}(x), \quad S_0(x) = f(x), \quad K=1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $n_1 = [(n+1)/2]$ ;  $p \geq 0$  — целое число, порядок сглаживания;  $c_{i,j}$  — коэффициенты формул явной аппроксимации функций [8]. Значения  $x_j$ ,  $S_{K-1}(x_j)$  при  $j \leq 0$ ,  $j > N$  в (1) для периодической на  $[0, l]$  функции выбираются из условий периодичности, для непериодической — из некоторых краевых условий. Введем оператор  $\mathcal{L}_N$ :

$$\mathcal{L}_N f = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T.$$

Из результатов, полученных в [8], следует, что  $\mathcal{L}_N S_K(x) = V \mathcal{L}_N S_{K-1}$ , причем оператор  $V$  определяется формулой

$$V \mathcal{L}_N f = \left( E + \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} D_i \Delta^{2i} \right) \mathcal{L}_N f, \quad n_2 = [n/2] + 1.$$

Здесь  $E$  — единичный оператор,  $\Delta^{2i} = (\Delta_1^{2i}, \dots, \Delta_N^{2i})^T$ ;  $\Delta_j^{2i} f$  конечная центральная разность порядка  $2i$  значений  $f_{j-i}, \dots, f_{j+i}$ ; матрица  $D_i$  — диагональная, причем в строке с номером  $q$  на диагонали стоит коэффициент  $d_{q,i}$ , который находится из условий аппроксимации [8] вместе с  $c_{q,j}$ .

Введем оператор  $P$ , который определяется формулой (1) при  $K=1$ :  $S_1(x) = P \mathcal{L}_N f$ . Тогда рекуррентную формулу (1) можно переписать в виде

$$S_{K+1}(x) = P V^K \mathcal{L}_N f, \quad K=0, 1, \dots, \quad (2)$$

Для периодического случая и равномерной сетки найдем собственные числа и собственные функции оператора  $V$ , т. е. ненулевые решения задачи

$$\left(E + \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} D_i \Delta^{2i}\right) v = \lambda v, \quad (3)$$

$\lambda \neq 0$ ,  $v \in R^N$  т. е.  $N$ -мерному евклидову пространству. Очевидно, что  $\lambda = 1$  соответствуют те и только те собственные функции, для которых

$$(V - E) v = \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} D_i \Delta^{2i} v = 0. \quad (4)$$

Этому уравнению удовлетворяет любой полином степени  $2p+1$ . Так как аппроксимирующая формула (1) точна лишь на полиномах степени  $2p+1$  и не восстанавливает точно никакие другие функции, то уравнение (4) не имеет других решений, кроме указанных. Это означает, что  $\lambda = 1$  является  $(2p+2)$ -кратным собственным числом оператора  $V$  и ему соответствуют собственные функции

$$\bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{g}_{2p+2} = \begin{pmatrix} x_1^{2p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N^{2p+1} \end{pmatrix}.$$

Остальные собственные функции будем искать в виде вектор-функции  $v = \sin \alpha x$ ,  $\alpha \neq 0$ . Подставляя в уравнение (3), получаем

$$(1 - \lambda) \sin \alpha x + \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} D_i \Delta^{2i} \sin \alpha x = 0.$$

Учитывая равенство

$$\Delta^{2i} \sin \alpha x = (-2)^i \sin \alpha x (1 - \cos \alpha h)^i, \quad h = l/(N-1),$$

получаем далее

$$(1 - \lambda) \sin \alpha x + \sin \alpha x \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} d_i (-2)^i (1 - \cos \alpha h)^i = 0, \quad (5)$$

Так как мы ищем нетривиальные решения, то сокращаем это уравнение на  $\sin \alpha x \neq 0$ , получаем выражение для  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 + \sum_{i=p+1}^{n_2+p-1} d_i (-2)^i (1 - \cos \alpha h)^i. \quad (6)$$

Найдем такие значения параметра  $\alpha$ , при которых функция  $\sin \alpha x$  периодична с периодом  $l$ . Для этого достаточно решить уравнение

$$\sin \alpha l = 0,$$

из которого находим  $\alpha = \alpha_i = \pi i / l$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Линейно независимые собственные функции получим при  $i = 1, \dots, N-1$ . Выберем из этих номеров такие  $N-2p-2$  номера, чтобы соответствующее максимальное собственное значение из всех

$$\lambda_{i+1} = 1 + \sum_{j=p+1}^{n_2+p-1} d_j (-2)^j \left(1 - \cos \frac{\pi i}{l} h\right)^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (7)$$

было возможно наименьшим. Из формулы (7) следует, что это будет в случае, когда  $i$  меняется от  $2p+2$  до  $N-1$ . Таким образом, оставляем в рассмотрении только  $N$  собственных функций  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{2p+2}$ ,  $\bar{g}_i = \sin \alpha_{i-1} x$ ,  $i = 2p+3, \dots, N$ .

Пусть  $g_1, \dots, g_N$  — полученная из них ортонормированная в  $R^N$  система. Любой вектор  $v \in R^N$  однозначно представим в виде

$$v = \sum_{i=1}^N v_i g_i.$$

Обозначим  $G_q$  линейную оболочку из  $g_1, \dots, g_q$ . Для того чтобы воспользоваться результатами теории, развитой в [4], необходимо убедиться что  $0 < \lambda_i < 1$ ,  $i = 2p+3, \dots, N$ . Проверим эти свойства для конкретных  $n$  и  $p$ .

Квадратичные сплайны,  $n=2$ :

$$a) \quad p=0: \quad \lambda_i = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi h}{l} (i-1), \quad i = 3, \dots, N;$$

$$\lambda = \max_{3 \leq i \leq N} \lambda_i = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi h}{l} < 1,$$

$$\lambda_N = \min_{3 \leq i \leq N} \lambda_i = \frac{1}{2} > 0;$$

$$b) \quad p=1: \quad \lambda_i = 1 - \frac{1}{16} \left(1 - \cos \frac{\pi h}{l} (i-1)\right)^2, \quad i = 5, \dots, N;$$

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{15}{16} + \frac{1}{8} \cos \frac{4\pi h}{l} - \frac{1}{16} \cos^2 \frac{4\pi h}{l} < 1,$$

$$\lambda_N = \frac{3}{4}.$$

Кубические сплайны,  $n=3$ :

$$a) \quad p=0: \quad \lambda_i = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi h}{l} (i-1), \quad i = 3, \dots, N;$$

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi h}{l} < 1,$$

$$\lambda_N = \frac{1}{3};$$

$$6) \quad p=1: \quad \lambda_i = 1 - \frac{1}{9} \left( 1 - \cos \frac{\pi h}{l} (i-1) \right)^2, \quad i=5, \dots, N;$$

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{8}{9} + \frac{2}{9} \cos \frac{4\pi h}{l} - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{4\pi h}{l} < 1,$$

$$\lambda_N = \frac{5}{9}.$$

Сплайны пятой степени,  $n=5$ :

$$p=0: \quad \lambda_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{l} (i-1) + \frac{1}{30} \left( 1 - \cos \frac{\pi h}{l} (i-1) \right)^2,$$

$$i=3, \dots, N;$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{l} + \frac{1}{30} \left( 1 - \cos \frac{2\pi h}{l} \right)^2 < 1,$$

$$\lambda_N = \frac{2}{15}.$$

Нетрудно проверить выполнение нужных свойств и для других  $n$  и  $p$ . Доказательство в общем случае требует громоздких выкладок, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Отметим, что формула (1) может быть использована лишь при  $n \geq 2$ . При  $n=0,1$  метод последовательных сглаживаний записывается с помощью формул

$$S_{K-1/2}(x) = \sum_{i=-n_1+1}^{N+n_1-1} S_{K-1}(x_i) s_{i-n_1, n}(x), \quad S_0(x) = f(x),$$

$$S_K(x) = \sum_{i=-n_1+1}^{N+n_1-1} S_{K-1/2}(t_i) s_{i-n_1, n}(x), \quad t_i = 0,5(x_i + x_{i+1}), \quad K=1, 2, \dots$$

Оператор  $V$  в обоих случаях есть

$$V = E + \frac{1}{4} \Delta^2,$$

собственные числа  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,

$$\lambda_{i+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{l} i, \quad i=1, \dots, N-2;$$

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{l} < 1, \quad \lambda_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi h}{l} > 0.$$

Обратимся теперь к случаю функции  $f(u)$  от  $M$  переменных  $u = (u_1, \dots, u_M)$ . Область изменения переменной  $u_i$  считаем отрезком и обозначим  $\Omega_i$ , через  $\Omega$  обозначим прямое произведение об-

ластей  $\Omega_i$ . На каждой оси  $u_i$  задана сетка  $\{x_{i,j}\}$ , так что  $x_{i,1}$  и  $x_{i,N_i}$  — концы отрезка  $\Omega_i$ . Тогда  $\Omega$  — параллелепипед в  $M$ -мерном пространстве. Используя и несколько видоизменяя формулу (4.5.1) работы [8], метод последовательных сглаживаний определим формулами

$$S_K(u) = \sum_{i_1=-\alpha_1+1}^{N_1+\alpha_1} s_{i_1-\alpha_1, n_1}(u_1) \left\{ \sum_{i_1=-p_1}^{p_1} c_{i_1, j_1} \left\{ \dots \right. \right. \\ \dots \left\{ \sum_{i_M=-\alpha_M+1}^{N_M+\alpha_M-1} s_{i_M-\alpha_M, n_M}(u_M) \left\{ \sum_{i_M=-p_M}^{p_M} c_{i_M, j_M} S_{K-1}(x_{1, i_1+i_1}, \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots x_{M, i_M+i_M} \right\} \dots \right\} \left. \right\}. \quad (8)$$

где  $\alpha_i = [(n_i + 1)/2]$ ,  $S_0(u) = f(u)$ . Обозначая через  $P_i, L_{N,i}, V_i$  операторы  $P, \mathcal{L}_N, V$ , действующие по переменной  $u_i$  согласно ранее введенным правилам для одной переменной, формулу (8) можем переписать в «расщепленном» виде аналогично (2):

$$S_{K+1}(u) = \prod_{j=1}^M P_j V_j^K L_{N,j} f(u),$$

что сводит исследование метода к исследованию формул для одной переменной. Заметим, что параметр  $K$  в (8) можно считать мультииндексом и рассматривать разное число сглаживаний по разным переменным.

### § 3. Регуляризация некоторых некорректных задач

В [4] сформулированы общие теоремы о регуляризации некоторых некорректных задач за счет выбора параметра в методе последовательных сглаживаний. Рассмотренная реализация метода последовательных сглаживаний удовлетворяет условиям этих теорем. В случае решения задачи численного дифференцирования, а также когда (1°) есть интегральное уравнение I рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность, оператор  $A^{-1}$ , рассматриваемый на подпространстве сплайнов  $SP_N$  по регулярной сетке с  $N$  узлами, ограничен по норме величиной

$$\|A^{-1}\|_{SP_N \cap C^{0,\alpha}[0,1]} \rightarrow C^{0,\alpha}[0,1] \ll Q(N) = O(N).$$

Из результатов работы [11] следует, что при решении интегрального уравнения (1°) в случае логарифмической особенности в ядре методом сплайн-коллокации норма дискретного аналога

$A_N^{-1}$  также ограничена величиной  $O(N)$ . Заметим, что в рассматриваемых случаях  $\lambda = 1 + O((i-1)h)^{2p+2}$ ,  $i > 2p+2$ . Таким образом, для рассматриваемого случая справедлива следующая теорема, вытекающая из теоремы 1 работы [8].

**Теорема.** Пусть  $f(x) = f(x) + \delta(x)$ ,  $f(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\|\delta(x)\|_{C[0,1]} \leq \delta_0$ , вектор  $\mathcal{L}_N \delta$  ортогонален  $G_q$ , тогда при выполнении условий  $q = q(N) \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\rho^*(N, \delta_0) = q^{-2p-2} N^{3-\nu} \{ \ln \{ \delta_0 q^{2p+2} N^{\nu-3/2} \} + 1 \} \rightarrow 0, \quad \delta_0 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\nu = \min \{ 2p+2, r, n+1 \} - 2p - \alpha,$$

метод последовательных сглаживаний при  $K = K^*(N, \delta_0)$

$$K^* = \left[ \frac{N^{2p+2}}{q^{2p+2}} \ln \{ \delta_0 q^{2p+2} N^{\nu-3/2} \} \right]_+ + 1,$$

дает регуляризирующий алгоритм в пространстве  $C^{0,\alpha}[0, 1]$  решения задачи численного дифференцирования и решения (в сочетании с методом сплайн-коллокаций) интегрального уравнения I рода с логарифмической особенностью в ядре.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 501—504.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
3. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.
4. Гребенников А. И. Регуляризирующие алгоритмы решения некоторых некорректных задач с помощью сплайнов. — В сб.: Методы и алгоритмы в численном анализе. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Reinsch C. H., Smoothing by Spline Functions. — Num. Math., 1967, v. 10, p. 177—187.
6. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1974.
7. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983.
8. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. — М.: Наука, 1966.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
11. Гребенников А. И. Методы сплайн-коллокации и двойной сплайн-аппроксимации решения операторных уравнений и приложение к решению интегральных уравнений с особенностями. — В сб.: Методы и алгоритмы в численном анализе. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

1°. Проблема автоматизации научного измерительного эксперимента связана с необходимостью получения устойчивых решений многочисленных практических задач обработки, интерпретации, идентификации и моделирования данных, которые в большинстве случаев сводятся к нахождению решения некорректных обратных задач с детерминированными или стохастическими возмущениями. В связи с этим в теории расчета количественных характеристик изучаемых явлений в настоящее время ведущее место занимают современные методы регуляризации [1].

Можно выделить два исторически сложившихся направления развития методов обработки. Первое направление, детерминистическое, основоположником которого является Лёжандр, состоит в интерпретации возмущений некоторым детерминированным классом, ограниченным на некоторой метрике. Учет и расчет детерминистскими методами влияния возмущений входных данных на искомое решение в некорректных задачах особенно ярко проявляются на примере решений уравнений первого рода. В этом случае неустойчивость решений состоит в том, что при уменьшении величины возмущений погрешность классического решения может как угодно сильно увеличиваться.

Второе направление, берущее начало от Гаусса, характеризуется тем, что сама модель, а также возмущения в правой части и в операторе уравнения предполагаются случайными величинами, измеримыми относительно некоторых вероятностных мер. Задача построения регуляризатора в таких моделях состоит в конструировании вспомогательной схемы оценивания, для которой искомая оценка (аппроксимирующее решение) обладала бы свойствами состоятельности и эффективности. Если имеются достоверные априорные меры для искомого решения, то допускается некоторая смещенность, приводящая, как правило, к улучшению свойств вычисляемых оценок:

Указанные направления в процессе своего развития претерпели взаимное влияние и дополняли друг друга. Иногда оба подхода использовались для решения одного и того же класса задач.

Например, для задачи вычисления корня в линейном уравнении

$$Ax=y \quad (1)$$

Лежандр в 1805 г. сформулировал оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку искомого решения  $x$  в виде



$$\hat{x} = \arg \min_x \|y - Ax\|^2,$$

а пять лет спустя Гаусс сформулировал решение этой задачи следующим образом:

$$\hat{x} = \arg \max_x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|y - Ax\|^2 \right\}.$$

В 1763 г. возник «байесовский подход» в статистике, сформулированный Байесом в виде так называемого правила Байеса, а в 1788 г. Лагранж предложил определять условный экстремум с помощью метода неопределённых множителей. Неравенство Коши — Буняковского для линейных нормированных пространств в функциональном анализе, принцип неопределённости Гейзенберга (1927 г.) в квантовой механике и неравенство Крамера — Рао в статистике (1945 г.) также являются примерами использования параллельных математических методов при количественном моделировании того или иного явления.

Помимо задач физики, являющихся, по существу, статистическими, существуют еще искусственная рандомизация, основанная на преднамеренном введении случайности и широко применяемая при решении самых разнообразных задач. В качестве примеров областей применения этого метода могут служить такие задачи, как суммирование расходящихся рядов, аппроксимация плохо определенных функций, ускорение сходимости итерационных процессов, поиск экстремума многоэкстремальных функций, случайный поиск, задачи оптимизации в условиях неопределённости и другие.

Этот метод представляет собой искусственное рассмотрение искомого решения и самой модели как случайных с заданной на них фидуциальной плотностью распределения. Эта плотность распределения в отличие от плотности распределения помех не является плотностью частотного распределения, а характеризует лишь степень нашего знания области принадлежности искомого решения.

*Fiducial* — основанное на вере убеждение. Кендалл и Стюарт пишут: «Фидуциальное распределение не является частотным распределением в том смысле, в каком использовалось это выражение до сих пор. Это новое понятие, выражающее интенсивность нашей веры в различные возможные значения параметра...» Фидуциальное распределение «... можно рассматривать как распределение вероятностей в смысле степеней убежденности». «Фидуциальное распределение можно также рассматривать как новое понятие, дающее формальное выражение некоторым интуитивным идеям относительно величины нашего доверия к различным значениям параметра». В этом смысле такая рандомизация является мысленной и очень удобна для задания априорной информации в недоопределённых задачах. Искусственная рандомизация тесно связана с регуляризацией оценок, не обладающих свойствами состоятельности и эффективности.

Характерно, что оба указанных подхода допускают широкое толкование априорной информации о классах возмущений. Это приводит к тому, что в зависимости от исходной информации получаются различные варианты структуры устойчивых, регуляризаторов, особенно оптимальных в определенном смысле.

Применительно к решению некорректных переопределенных уравнений оба направления первоначально использовались в предположении, что возмущена только правая часть уравнения. В последние два десятилетия, главным образом благодаря работам советских математиков, начали интенсивно развиваться методы решения некорректных задач, в которых кроме правой части также возмущен оператор. Особенно большие успехи были достигнуты в разработке методов решения некорректных уравнений с детерминированными возмущениями в операторе и в правой части уравнения, изложенных в монографии [2].

Значительно менее разработанными оказались методы решения некорректных задач для тех случаев, когда в правой части уравнений и в операторе возмущения случайны [3]. С таким классом задач приходится сталкиваться довольно часто при моделировании, обработке и интерпретации экспериментальных данных. Методика решения некорректно поставленных задач в статистической постановке, когда входная и априорная информация о величинах задается в статистической терминологии, получила название статистической регуляризации.

Цель нашей работы — изложить, ограничиваясь конечномерными линейными моделями (иначе говоря, стохастическими алгебраическими уравнениями), некоторые методы обработки, интерпретации и моделирования измерительных экспериментов, описываемые уравнениями первого рода со случайно возмущенным оператором или плохо известным причинно-следственным механизмом (матрица  $A$ ) модели эксперимента. Суть предлагаемых методов продемонстрирована на примере решения линейных (матричных) уравнений, для которых оценки параметров могут быть выписаны в законченном виде. Для нелинейных уравнений подобное рассмотрение не проводилось, так как вычислительный алгоритм определения параметров в них требует индивидуального решения, хотя предлагаемый вид интерпретирующих функционалов сохраняется.

В работе исследуется подход, при котором математическая модель задается в терминах математической статистики, а методы оценивания параметров исходят из вероятностных правил. В этом случае возникает естественный вопрос, как сравнивать между собой разные оценки параметров или приближенные решения, полученные в результате обработки и интерпретации? Здесь естественно воспользоваться сравнением асимптотической эффективности оценок при  $n \rightarrow \infty$  (где  $n$  — число наблюдений), что характерно для современного подхода в статистике, развитого в работах Фишера, Ле Кама, Вольфовица, Гаека и др.

Аналогичным является и критерий в регуляризации некоррект-

но поставленных задач, когда исследуется асимптотическое поведение оценок параметров при  $\alpha \downarrow 0$ . Величина параметра регуляризации по порядку эквивалентна отношению средних энергий помехи к сигналу  $\alpha \propto C\delta^2 = \delta^2/\gamma^2$ , что в рандомизированном случае при исследовании асимптотических свойств для  $\alpha \downarrow 0$  эквивалентно случаю наличия большой статистики.

Вместе с тем стоит заметить, что для большинства задач математической физики случай «большой статистики» входных данных не является, к сожалению, характерным. Однако если нельзя установить состоятельность оценки из результатов наблюдений, то другим важным источником информации могут служить различные априорные сведения о ней, а также сведения о причинно-следственном механизме и других параметрах математической модели. На использование этого важного канала притока новой информации в непоставленных задачах в целях улучшения математических свойств искомых оценок было обращено внимание в фундаментальных исследованиях Тихонова, Лаврентьева, Иванова и др. Эта идеология, естественно, может быть перенесена и на рандомизированный случай.

Вместе с вышеупомянутыми критериями полезно при интерпретации следовать также вариационным принципам, заимствованным из физики и аналитической механики и раскрывающим наглядную «физическую» сторону методов оценивания, возникающих при математическом моделировании и обработке естественнонаучных данных.

2°. Пусть функция измерительного преобразования  $A$ , описывающая причинно-следственные связи между характеристиками модели  $x$ , подлежащими изучению, и наблюдаемыми явлениями  $y$ , задается уравнением (1). Для удобства варьирования по матрице  $A$ , а также для задания плотности априорной меры на ней, используя свойства кронекеровского произведения для матриц, систему (1) можно переписать в виде

$$Ax \equiv (x \otimes E_m) A^{(v)} = y.$$

Здесь  $C \otimes D$  — кронекеровское произведение матриц  $C$  и  $D$ . Для матрицы  $A = (a_1 : a_2 : \dots : a_n)$ , состоящей из  $n$  столбцов  $a_i$  (раз-

мер каждого  $1 \times m$ ), введем столбец  $A^{(v)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , который полу-

чается, если каждый последующий столбец расположить ниже предыдущих,  $E_m$  — единичная матрица  $m \times m$ .

Такая запись уравнения (1) позволяет рассматривать его как функцию от двух независимых равноправных переменных  $x$  и  $A$ , связанных мультипликативной зависимостью, и считать решением не только  $x$ , но и  $A$ , что важно для задач с приближенно известной матрицей  $A$ . Новая запись уравнения (1) также удобна при практическом решении задач обработки, интерпретации и моделирования данных, когда равенство в уравнении (1) является услов-

ным и элементы правой части и матрицы имеют погрешность, например, порядка 100%. Появление больших погрешностей в правой части уравнения (1) и в операторе часто связано также с применением классических методов для изучения математических моделей в физике, таких как размерностный качественный анализ, асимптотические методы, понижение размерности задачи путем усреднения уравнений, линеаризации и т. п.

Многочисленное, и порою не совсем обоснованное, использование этих методов при анализе и упрощении задач, естественно, заставляет разработчика пересчитывать и завышать дисперсии погрешностей новой модели и ее параметров.

Иногда уравнение (1) является соотношением между математическими ожиданиями  $A_0, x_0, y_0$  величин  $A, x, y$ , каждая из которых в пределах дисперсии может сильно варьироваться. Такие задачи являются естественным продуктом исторического (более полтора столетия) развития понятия условных систем типа (1) и их обобщенного решения, а также рассмотрения задач, в которых входные данные и матрица  $A$  имеют стохастическую природу. Задача автоматизации измерительного эксперимента, создание систем автоматической обработки, интерпретации и моделирования результатов требуют решения таких систем уравнений, хотя бы в виде «нормального решения» и «нормальной модели», в рамках априорных сведений о них.

Для выполнения дальнейших аналитических выкладок относительно неизвестных величин  $x$  и  $A$  и наблюдаемого вектора  $y$  сделаем следующие точные аналитические предположения.

Предположим, что имеется случайная реализация  $z$  правой части уравнения (1), которая обладает условным средним

$$M(z|A, x) = y$$

и условной плотностью распределения

$$p(z|A, x) = C_\varphi \exp\{-\varphi(\Phi_y(z - Ax))\},$$

где  $C_\varphi$  — нормирующий множитель;  $\varphi(z)$  — функция, выполняющая роль метрики, например, нормы;  $\Phi_y$  — весовая невырожденная матрица, обратная к дисперсионной ( $m \times m$ ).

Задана также случайная матрица  $B$ , реализующая истинную матрицу  $A$  и, статистически не зависящая от  $y$ . Средние матрицы можно записать в виде выражения

$$M(B|A, x) = A,$$

а ее условную плотность — следующим образом:

$$p(B^{(v)}|A, x) = C_\psi \exp\{-\psi(\Phi_A(B^{(v)} - A^{(v)}))\}.$$

Относительно решения  $x$  известно, что оно реализуется в виде  $x_0$  с условным средним

$$M(x_0|A, x) = x$$

и условной плотностью

$$p(x_0|A, x) = C_f \exp \{-f(\Phi_x(x-x_0))\},$$

статистически не зависящей от  $z$  и  $B$  и известной из дополнительных вспомогательных исследований.

3°. В эксперименте регистрируются, как правило, не интересующие нас характеристики явления, а лишь некоторые их линейные комбинации  $y = Ax$  [2]. Задача интерпретации в этом случае обычно сводится к решению уравнения (1), которое может оказаться неустойчивым и порождать собственную ложную структуру решения. Взаимосвязанность этих двух задач — статистической обработки и интерпретации — является одной из сложнейших и мучительных задач проблемы автоматизации обработки, интерпретации и моделирования данных эксперимента. В работе [7] констатируются следующие сложности в обработке: «Серьезный анализ показывает, что при изучении механизма явлений методами математического разложения суммарных данных по параметрам некоторой гипотетической модели мы имеем дело с тремя источниками неопределенности. Один из них связан со случайной ошибкой результатов измерений, другой — с неоднозначностью процесса оценивания параметров модели, порождаемой сложностью этого процесса, и, наконец, третий — с возможностью различной формулировки той химической аксиоматики, которая задает набор тех или иных промежуточных реакций».

Автоматизированное построение разностной схемы можно рассматривать как замену непрерывного физического описания явления ее дискретным аналогом. При этом возникают новые параметры — шаги разностной сетки (по времени и пространству), вводимые для замены области непрерывного изменения аргументов, в которых ведется поиск решения исходной задачи. Вследствие этого могут возникать дополнительные «частоты» в решении.

Для широкого класса экспериментальных установок характерны следующие этапы обработки результатов наблюдений [2].

— Снятие информации с регистрирующей аппаратуры или с постоянного носителя. Перевод ее в числовой код и засылка в память ЭВМ.

— Статистическая обработка результатов наблюдений с оценкой степени доверия. Учет нормирующих измерений (фоновых, калибровочных, дозиметровочных и т. п.).

— Интерпретация результатов, полученных на втором этапе обработки. Она состоит обычно в оценке искомых характеристик модели изучаемого явления или объекта.

В настоящей работе мы остановимся на решении задач связанных со вторым и третьим пунктами программы, иницированной и нашедшей свое развитие в трудах ведущих мировых ядерных исследовательских центров. Эти этапы особенно актуальны в задаче обработки научно-технических экспериментов, характеристики которых являются по своей природе стохастическими — в них бывает трудно отличить аномальное измерение (выброс или сбой) от «редкого» измерения или учета «слабого» эффекта.

К настоящему времени существует большое число систем автоматической обработки различных экспериментов [1]. Заметим, что в основе всех систем — блок статистической обработки, реализованный по схеме, базирующейся в советской литературе на работе Клепикова и Соколова [6]. Она основана на методике ликвидации «аномальных» измерений с применением различных статистических критериев. После так называемого «выглаживания» входных данных включается блок вычисления регуляризованного решения, который уже действует совершенно независимо от блока статобработки. Эта методика не свободна от критики.

Первое и основное — это то, что нахождение решения должно быть основано на едином принципе отбора приближенного решения из исходной информации существующей модели. По-видимому, нельзя допускать того, чтобы статобработка действовала сама по себе, а метод вычисления решения — сам по себе. Выбор метрики расхождения в методе вычисления решения — нормировка, зависит от условной функции распределения значений наблюдаемых входных данных и, по существу, связан с самим регуляризирующим алгоритмом.

Практика показала также, что блок статобработки представляет собой сложный пакет программ, зависящих от большого числа параметров и констант, трудно перестраиваемых на новую входную информацию, и является трудоемким и сложным в своем использовании.

До каких пор нужно «выглаживать» исходную информацию от «сбоев», чтобы не потерять «тонкую структуру» решения? И наоборот, если не выглаживать данные, то какова уверенность в том, что мы не будем иметь «ложную структуру» решения? Эти вопросы вообще не имеют ответа и возникают лишь в результате раздельного применения методов статистики и вычислительных методов к решению органически неразделяемой на эти составные части проблемы.

Если в статистике входных данных наблюдаются «большие» выбросы, то такой вывод, несомненно, связывается с предположением о существовании плотности распределения этих данных, относительно которой в нашем представлении они являются «редкими». Следовательно, чтобы регуляризатор на них реагировал, необходимо, чтобы меры расхождения, или метрики, в нем определялись через эту плотность распределения. Ставя тогда экстремальную задачу для такого регуляризатора, мы будем аномальные измерения убирать или, наоборот, их отыскивать. Примерами таких мер расхождения могут служить:

а) энтропия по Больцману:

$$H = - \sum_i p_i \ln p_i;$$

а) расстояние Бхаттачарии между векторами  $x$  и  $x'$ :

$$d(x, x') = - \frac{1}{n} \ln \sum_y (p(y|x) p(y|x'))^{1/2};$$

в) метрика Вассерштейна:

$$\rho(X, Y) = \inf_{P_{XY} \in \rho_{XY}} M\{|X - Y|\} = \\ = \inf_{P_{XY} \in \rho_{XY}} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta |\alpha - \beta| p_{XY}(\alpha, \beta),$$

характеризующая степень согласованности двух случайных величин в смысле средней ошибки.

Задаваясь конкретным видом плотности  $p(y|x)$ , можно выписывать функциональный вид получающегося метода обработки, как это проделано в п. 5° для величины  $H$ . Тем самым первичная статобработка может быть сведена к выбираемому пользователем виду метрики в регуляризаторе и, следовательно, автоматизируема.

Родоначальником классической схемы статистического анализа данных, к которой мы привыкли и которая является предметом изучения в вузовских курсах статистики и одной из схем математического моделирования явлений, является Фишер. В последнее время, однако, наметились некоторое недоверие и скептицизм к оценкам такого статистического анализа. Объяснение этого охлаждения состоит, по-видимому, в широком применении старых концепций к новому, не традиционному для статистики, большому классу задач: ядерной физики, геофизики, радиофизики, радиотехники, электродинамики, спектроскопии и других разделов математической физики, — в которых до начала широкой автоматизации эксперимента этими методами пользовались редко и осмотрительно. В связи с этим можно назвать три причины, по которым применение старых фишеровских концепций к этим задачам является сложным:

- многомерность, многопараметричность моделей;
- широкое использование ЭВМ;
- скептицизм и отсутствие веры в адекватность вероятностных предпосылок с реальным поведением помех и погрешностей.

Широкое использование вычислительных средств в статистическом анализе экспериментальных данных, решив старые проблемы, замахнулось «почти автоматически» на решение крупномасштабных задач и немедленно породило новые, еще более сложные, проблемы, которые коснулись разных областей (как самих вычислительных методов, так и кардинальных вопросов обработки и интерпретации): что есть хорошая математическая модель описываемого явления или что есть хороший эксперимент?

В начале 60-х годов была показана, теоретически и численно, возможность решения некорректно поставленных задач. Так, параметрический регуляризирующий алгоритм [2], обладая большой универсальностью, стал практическим и теоретическим рабочим инструментом решения неустойчивых уравнений первого рода, к кото-

рым сводится большое число некорректных задач моделирования, обработки и интерпретации. Использование этого метода при решении конкретных задач потребовало дополнительных специфических доработок. В некоторых случаях использование этого метода привело к созданию специальной регуляризующей идеологии в каждом конкретном случае (которая являлась наиболее оптимальной в вычислительном смысле в каждом из этих случаев), а также к учету и использованию специфики входной и априорной информации. Примерами таких узких регуляризующих алгоритмов могут служить алгоритмы для некорректно поставленных задач с монотонными решениями, дескриптивные методы, статистические регуляризующие алгоритмы, синтез диаграмм направленности антенн, задачи управления и т. д. Использование для специфических входных и априорных данных специальных регуляризующих алгоритмов является довольно естественным образом действия, и ничего необычного в этом нет. Спрашивается, как можно наиболее естественно записать устойчивый интерпретирующий функционал, связывающий искомые параметры, наблюдаемые величины и априорную информацию, для модели, описывающей данное физическое явление в рандомизированном случае? Для ответа на этот вопрос обратимся к различным устойчивым методикам, основанным на различных статистических принципах.

4°. Сформулируем понятие решения алгебраической системы, когда матрица системы задана с погрешностью, определяемой с помощью двух первых моментов,  $A_0$  и  $\Phi_A^{-1}$ , а относительно искомого решения существует априорная информация в виде также двух моментов,  $x_0$  и  $\Phi_x^{-1}$ . Рассмотрены два случая — дискретный и непрерывный. Дискретный соответствует ситуации, когда неизвестная матрица задается с помощью  $m$  различных матриц  $A_1, \dots, A_m$  с заданным априорным распределением на них. Непрерывный случай — ситуации, когда пользователь говорит, что каждый из его элементов матрицы имеет погрешность, равную, например, 10%. В этом случае в качестве первого момента  $A_0$  берется сама матрица  $A$ , а роль второго момента исполняет матрица  $\Phi_A^{-1}$  размера  $(mn \times mn)$  с элементами  $b_{ij}^2 = a_{ij}^2/100$ .

В качестве основной идеи при решении таких систем используется идея рассмотрения алгебраической системы как функции двух независимых неизвестных переменных  $x$  и  $A$ , где определению подлежит не только  $x$ , но и  $A$ .

Одним из естественных и старых способов введения априорной информации в недоопределенных задачах является правило Байеса. Так, в дискретном случае, когда точные  $A$  и  $y$  неизвестны, а известны их реализации в виде  $m$  матриц  $A_1, \dots, A_m$  и  $n$  правых частей  $y_1, \dots, y_n$ , где  $y_i \in N(\bar{y}, \Phi_y^{-1})$ , применение формулы Байеса для нахождения оценки  $\hat{x}$  дает следующая «средневзвешенная» формула [12]:

$$\hat{x} = M(x|y) = M[M(x|A, y)|y] = M(x|A_1, y)P(A=A_1|y) + \dots$$



$$\dots + M(x|A_m, y) P(A=A_m|y) = \sum_{i=1}^m \pi(A_i) m_i,$$

где  $m_i = M(x|A_i, y)$ , а  $\pi(A_i) = P(A=A_i|y)$ . Величина  $m_i$  вычисляется как наиболее вероятная апостериорная оценка

$$m_i = \left[ \frac{1}{n} \Phi_x \Phi_y^{-1} + A_i^T \Phi_y A_i \right]^{-1} \left[ \frac{1}{n} \Phi_x m_0 + A_i^T \Phi_y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right].$$

Весовые множители  $\pi(A_i)$  при соответствующих матрицах  $A_i$  вычисляются по формуле

$$\pi(A_i) = P(A=A_i|\hat{y}) = \frac{P(\hat{y}|A=A_i) P(A=A_i)}{P(\hat{y})} = \frac{P(\hat{y}|A=A_i) P(A=A_i)}{\sum_{i=1}^m P(\hat{y}|A=A_i) P(A=A_i)},$$

где  $P(A=A_i)$  — априорная вероятность для матрицы  $A_i$ ;  $\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  и

$$P(\hat{y}|A=A_i) = C \exp \left( -\frac{1}{2} \left\| A_i x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right\|_{\Phi_y}^2 \right).$$

Вычисление «средневзвешенной» оценки для  $A$  происходит по формуле

$$\hat{A} = A_1 P(A=A_1|\hat{y}) + \dots + A_m P(A=A_m|\hat{y}) = \sum_{i=1}^m \pi(A_i) A_i.$$

Использование правила Байеса для апостериорного оценивания величин  $x$  и  $A$  в уравнении (1), когда входной вектор  $y$  и сама матрица  $A$  имеют большую по амплитуде, но известную по закону распределения погрешность, позволяет записать устойчивый вид интерпретирующего функционала в виде

$$T(x, A) = \varphi(\Phi_y(y - Ax)) + f(\Phi_x(x - x_0)) + \psi(\Phi_A(A - A_0)).$$

Этот функционал является естественным обобщением получившего в начале XIX в. большое развитие метода обработки наблюдений — метода наименьших квадратов и его регуляризованного обобщения. В аналитической механике этот метод приводит к общему принципу. В 1829 г. Гаусс опубликовал свой знаменитый мемуар, в котором дал доказательство принципа наименьшего принуждения. Это была единственная работа Гаусса по аналитической механике. Согласно этому принципу «действительным является то из мыслимых движений, для которых отклонение от освобожденного движения принимает наименьшее значение» [5].

В статистике аналогом механического принципа наименьшего действия является правило Байеса, так как оно минимизирует функцию риска вида

$$\epsilon_s = M \{c_s(x - \hat{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy p(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx c [x - x(y)] p(x|y).$$

В работах [13, 14] показано, что на основании формулы Байеса

$$\begin{aligned} (\hat{x}, \hat{A}) &= \arg \max_{x, A} p(x, A|y) = \arg \max_{x, A} \frac{p(y|x, A) p(x) p(A)}{p(y)} = \\ &= \arg \min_{x, A} (\varphi(\Phi_y(y - Ax)) + f(\Phi_x(x - x_0)) + \\ &\quad + \psi(\Phi_A(A - A_0))) = \arg \min_{x, A} T(x, A) \end{aligned}$$

максимум апостериорной плотности для параметров  $x$  и  $A$  в уравнении (1) достигается на  $(\hat{x}, \hat{A}) = \arg \max_{x, A} p(x, A|y)$ , являющихся

экстремальями функционала  $T(x, A)$ .

Решением системы уравнений Эйлера

$$0 \in \partial_x T \equiv A^T \Phi_y \partial_z \varphi(\Phi_y(y - Ax)) + \Phi_x \partial_x f(\Phi_x(x - x_0)),$$

$$0 \in \partial_A T \equiv (x \otimes \Phi_y) \partial_z \varphi(\Phi_y(y - Ax)) + \Phi_A \partial_A \psi(\Phi_A(A - A_0))$$

получаем необходимые условия минимума функционала  $T(x, A)$ , где  $\partial_x f(\xi)$  — субдифференциал функции  $f(x)$  по  $x$  в точке  $\xi$ . Рассмотрим детально функции  $\varphi$ ,  $f$ ,  $\psi$ , выполняющие роль метрики, например нормы, наиболее часто используемые в задачах обработки, интерпретации и оценивания.

Метод наименьших квадратов. Введем дисперсионные матрицы

$$D(y|x, A) = \Phi_y^{-1}, \quad D(x) = \Phi_x^{-1}, \quad D(A^{(v)}) = \Phi_A^{-1},$$

которые являются симметричными, положительно определенными и обратными к весовым матрицам.

В рассматриваемом случае гауссовых помех в параметрах  $y$ ,  $x$  и  $A$  функционал  $T(x, A)$  имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, A) &= (\Phi_y(y - Ax), y - Ax) + (\Phi_x(x - x_0), x - x_0) + \\ &\quad + (\Phi_A(A^{(v)} - A_0^{(v)}), A^{(v)} - A_0^{(v)}), \end{aligned}$$

а необходимые и достаточные условия его минимума задаются уравнениями

$$A^T \Phi_y A x - A^T \Phi_y y + \Phi_x(x - x_0) = 0,$$

$$(\Phi_y A x x^T)^{(v)} - (\Phi_y y y^T)^{(v)} + \Phi_A(A^{(v)} - A_0^{(v)}) = 0.$$

Метод минимальной гельдеровской нормы. Рассмотрим экспоненциальный класс плотностей  $\varphi$ ,  $f$ ,  $\psi$  с нормой

$$\|\Phi z\| = \left( \sum_{i=1}^n |(\Phi z)_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{где } \Phi = \Phi_y \vee \Phi_x \vee \Phi_A.$$

В случае такой нормы помехоустойчивые решения определяются из минимума

$$T(x, A) = \left( \sum_{i=1}^n |(\Phi_y(y-Ax))_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{j=1}^m |(\Phi_x(x-x_0))_j|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{mn} |(\Phi_A(A^{(v)}-A_0^{(v)})_k|^p \right)^{1/p},$$

а необходимые и достаточные условия задаются решением системы

$$A^T \Phi_y \Lambda (\Phi_y(y-Ax)) \text{sign } \Phi_y(y-Ax) + \Phi_x^T \Lambda (\Phi_x(x-x_0)) \text{sign } \Phi_x(x-x_0) \equiv 0, \\ (x \otimes \Phi_y) \Lambda (\Phi_y(y-Ax)) \text{sign } \Phi_y(y-Ax) + \\ + \Phi_A^T \Lambda (\Phi_A(A^{(v)}-A_0^{(v)})) \text{sign } \Phi_A(A^{(v)}-A_0^{(v)}) \equiv 0,$$

где для скалярной функции

$$\text{sign } t = \begin{cases} +1 & \text{при } t > 0, \\ \theta \in [-1, 1] & \text{при } t = 0, \\ -1 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

а для векторной функции операция  $\text{sign}$  применяется по координатам; диагональная матрица  $\Lambda(z) = \left( \sum_{i=1}^m |z_i|^p \right)^{1/q} \text{diag}(z_1^{p-1}, \dots, z_m^{p-1})$

для вектора  $z \in R^m$  и  $1/p + 1/q = 1$ .

При  $1 < p < \infty$  решение системы Эйлера всегда единственно.

Метод наименьших модулей. В случае экспоненциально симметричных помех с нормой  $\|\Phi z\| = \sum_{i=1}^m |(\Phi z)_i|$  (рас-

пределение Лапласа) в  $y$ ,  $x$  и  $A$  с обратимыми весовыми матрицами  $\Phi_y$ ,  $\Phi_x$ ,  $\Phi_A$  функционал  $T(x, A)$  и необходимые и достаточные условия получаются при  $p$ , равном единице.

Метод минимакса (наилучшее приближенное решение в смысле Чебышева). Пусть функции  $\varphi$ ,  $f$ ,  $\psi$  задаются с помощью нормы

$$\|\Phi z\| = \max_{1 \leq i \leq n} |(\Phi z)_i|, \quad \text{где } \Phi = \Phi_y \vee \Phi_x \vee \Phi_A.$$

Наиболее вероятное апостериорное решение будет определяться минимумом функционала

$$T(x, A) = \max_{1 \leq i \leq n} |(\Phi_y(y-Ax))_i| + \max_{1 \leq j \leq n} |(\Phi_x(x-x_0))_j| + \\ + \max_{1 \leq k \leq mn} |(\Phi_A(A^{(v)}-A_0^{(v)})_k|$$

как решение системы

$$A^T \Phi_y \Lambda_y \operatorname{sign} \Phi_y (y - Ax) + \Phi_x^T \Lambda_x \operatorname{sign} \Phi_x (x - x_0) \ni 0,$$

$$(x \otimes \Phi_y^T) \Delta_y \operatorname{sign} \Phi_y (y - Ax) + \Phi_A \Lambda_A \operatorname{sign} \Phi_A (A^{(v)} - A_0^{(v)}) \ni 0,$$

где  $\Lambda_z = \operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ ,  $\sum_{i=1}^j \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, j$ ;  $\lambda_i$  может отличаться от нуля только тогда, когда  $|z_i| = \max_{1 \leq i < m} |z_i| = \|z\|$ .

В отдельных ситуациях важным является знание асимптотического поведения апостериорных оценок  $\hat{x}$  и  $\hat{A}$  при большой априорной неопределенности, иначе говоря, предельных значений статистически регуляризационных решений при стремлении параметра регуляризации к нулю. Исследование таких предельных апостериорных оценок ограничим гауссовыми распределениями помех, дополнительно конкретизируем в  $T(x, A)$  дисперсионные матрицы:  $\Phi_x = \alpha^{-1} E$ ,  $\Phi_A = \alpha^{-1} E$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда функционал  $T(x, A)$  примет вид

$$T(x, A, \alpha) = f(z) + \alpha(z - z_0, z - z_0),$$

где

$$f(z) = (\Phi_y^{-1}(y - Ax), y - Ax), \quad z = [x, A^{(v)}] \in R^{n+mn}.$$

Обозначим через  $Z_\alpha = \{z_\alpha = [\hat{x}_\alpha, \hat{A}_\alpha^{(v)}]\}$  множество минимумов (глобальных) функционала  $T(x, A)$ .

**Теорема.** При  $\alpha \downarrow 0$  предельные точки множества  $Z_\alpha$  являются проекциями вектора  $z_0$  на множество  $Z = \{z = [x, A^{(v)}]\}$  (т. е. минимумами экстремальной задачи  $\{\|z - z_0\|^2 \rightarrow \inf \mid Ax = y\}$ ) и принадлежат множеству решений системы нелинейных уравнений

$$x - x_0 + A^T \lambda = 0, \quad A - A_0 + \lambda x^T = 0, \quad Ax = y,$$

где  $\lambda \in R^m$ . Если, в частности,  $x_0 = 0$ ,  $A_0 = 0$ , то система допускает явное решение:

$$\lambda_* = -\zeta, \quad x_* = V^T \zeta, \quad A_* = \zeta \zeta^T V,$$

где  $\zeta = y \|y\|^{-1}$ ;  $V$  — произвольная матрица размерности  $m \times n$ , такая, что  $\zeta^T V V^T \zeta = \|y\|$ .

В силу многочисленных практических применений в обработке представляется целесообразным остановиться на одном из предельных случаев этой апостериорной схемы оценивания с гауссовой помехой (способе решения уравнения (1)), когда  $A$  — точно заданная матрица. Положим, что пользователь — детерминист и он хочет знать, как соотносится «точное» байесовское решение в этом случае с классическим понятием общего решения в курсе линейной алгебры? Отличается ли чем-либо решение (псевдорешение) от байесовского?

Для ответа на эти вопросы проварьируем по  $x$  функционал

$$T(x) = \|y - Ax\|_{\Phi_y}^2 + \|x - x_0\|_{\Phi_x}^2.$$

Получим хорошо известную формулу для апостериорной оценки в виде

$$x = (\Phi_x + A^T \Phi_y A)^{-1} (\Phi_x x_0 + A^T \Phi_y y).$$

Воспользовавшись асимптотической формулой из алгебры псевдообратных матриц Мура — Пенроза,

$$A^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T,$$

найдем асимптотический вид «нормального байесовского решения». Для этого найдем предел в байесовском решении при  $\alpha \downarrow 0$ . Получим

$$x = \Phi_x^{-1/2} (\Phi_y^{1/2} A \Phi_x^{-1/2}) + \Phi_y^{-1/2} y + \Phi_x^{1/2} [E - (\Phi_y^{1/2} A \Phi_x^{-1/2}) + (\Phi_y^{1/2} A \Phi_x^{-1/2})] \Phi_x^{-1/2} x_0.$$

Эта «мало известная» формула [11] является общим байесовским решением. Так изменяется привычная формула общего решения

$$x = A^+ y + (E - A^+ A) x_0$$

при решении вырожденных или плохо обусловленных систем по априорной статистической информации, заданной в форме двух первых моментов, когда  $A$  — детерминированная матрица. Анализ различий этих формул указывает также на известную осторожность, которую приходится соблюдать вычислителю при решении неустойчивых уравнений первого рода со случайными входными и априорными данными регулярных методов решения некорректных задач.

Вычисление псевдообратной матрицы от приближенно заданной матрицы. Обобщением нормального решения условной системы может служить понятие приближенной обобщенной обратной матрицы для условной матричной системы

$$AX = E,$$

где  $A$  — исходная приближенная матрица;  $X$  — обобщенная обратная матрица;  $E$  — единичная матрица. Размеры  $A$ ,  $X$ ,  $E$  подобраны так, чтобы запись имела смысл.

Под приближенным понятием обобщенной обратной матрицы  $X$  и оценки  $\hat{A}$  для исходной приближенной заданной матрицы  $A$  в случае евклидовой нормы и весовых матриц  $\alpha E$ ,  $\beta E$  мы будем, как и ранее, понимать минимизирующие экстремали функционала

$$T(X, A) = \|AX - E\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 + \beta \|A - A_0\|^2.$$

Пусть  $X_0 = 0$  — нулевая матрица. Минимизируя функционал  $T(X, A)$  относительно  $X$ , получим известную формулу для ее оценки

$$\hat{X} \equiv A^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha E + A^+ A)^{-1} A^T$$

в виде псевдообратной матрицы  $\hat{X} = A^+$  по Муру — Пенрозу. Это

говорит о том, что первые два слагаемых, в  $T(X, A)$  определяют оценку для псевдообратной матрицы  $A^+$ . В силу этой формулы функционал  $T(X, A)$  можно переписать в виде аналогичной экстремальной задачи

$$T(A^+, A) = \alpha \|A^+\|^2 + \|A - A_0\|^2,$$

в которой, как и ранее, в качестве приближенной псевдообратной матрицы выбирается та, у которой наименьшая норма. В качестве численных алгоритмов вычисления приближенных псевдообратных матриц могут быть использованы как по координатный спуск, так и сингулярные разложения.

5°. Применение к практическим задачам физики метода регуляризации с большим уровнем помехи поставило перед пользователями этого параметрического метода ряд серьезных теоретических и практических проблем. К теоретическим проблемам относились решения вопросов, связанных с дилеммой — следовать ли схеме Клепикова — Соколова [6] (основанной на выглаживании входной кривой от сбоев и от других «редких» наблюдений и на применении устойчивых методов решения систем) или создать регуляризирующую методику, которая бы сама отбирала приближенные решения по заданному пользователем закону распределения входной ошибки?

Развитию этого подхода посвящен настоящий/раздел 5°. Статистический подход при этом основан на идеях робастного оценивания, развитых в работах Хубера, Тьюки и др. и примененных для решения некорректных задач обработки и интерпретации с «плохой» входной статистикой.

В этом случае представляется естественным измерять величину расхождения или невязки в (1) не с помощью наименьших квадратов

$$\varepsilon^2 = (y - Ax, y - Ax) = \|y - Ax\|^2,$$

а с помощью величины энтропии

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i,$$

так как она также является мерой разброса.

Для вычисления этой величины применим обычный для математики прием. Предположим, что невязка  $\varepsilon_i$  для величин  $x, A$  имеет экспоненциальную многомерную плотность распределения. Подставляя ее в  $H$ , как это сделано в работах [15, 18], получим обобщение функционала  $T(x, A)$ , приводящее к «взвешенному» методу наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} H(x, A) = & \sum_{i=1}^n \varphi[\Phi_y(y - Ax)] \exp[-\varphi(\Phi_y(y - Ax))] + \\ & + f[\Phi_x(x - x_0)] \exp[-f(\Phi_x(x - x_0))] + \\ & + \psi[\Phi_A(A - A_0)] \exp[-\psi(\Phi_A(A - A_0))]. \end{aligned}$$

Далее можно забыть про физический смысл происхождения нашего функционала и исследовать лишь его математические свойства. Легко видеть, что если экспоненты разложить в ряд по параметрам  $\Phi_{y,x,A}$ , то в качестве первого члена разложения мы получим функционал  $T(x, A)$ .

Для задач обработки, в отличие от функционала Гаусса — Маркова

$$(y - Ax, \Phi_y(y - Ax)) = \|y - Ax\|_{\Phi_y}^2,$$

где весовая матрица  $\Phi_y$  входит линейной в квадратичную форму, наш функционал  $H(x, A)$  представляет собой бисимметричную форму. Весовая функция  $\exp(-\Phi(y - Ax))$  «обрезает» аномальные наблюдения и входит нелинейно.

Функционал  $H(x, A)$  привлекателен тем, что в качестве меры разброса выбрана энтропия — естественная и давно применяемая физиками и химиками величина разброса. Энтропийный подход широко используется при анализе спектрального состава временных рядов [18]. Для выделения из многих возможных спектров единственного спектра требуется выполнение максимума энтропии для прогноза оценки со значениями рассматриваемого временного ряда. Неполное знание процесса компенсируется предположением о его полной хаотичности за пределами интервала наблюдения вместо приравнивания его нулю, принятого в линейных оценках спектра. Энтропия является также основным слагаемым в фундаментальном соотношении Гиббса в химической кинетике, и наша методика позволяет и это соотношение переписывать в привычном виде типа МНК.

При таком подходе мы изучаем те решения уравнения (1), которые получаются минимизацией функционала  $H(x, A)$  по величинам  $x$  и  $A$ , что соответствует нулевому значению погрешности  $\epsilon$  в (1) и идеологически эквивалентно идеям отбора приближенных решений в некорректных задачах. Такой путь отбора приближенных решений (т. е. прием минимизации) адекватен неэнтропийному принципу Бриллюэна, который связывает энергетические и информационные показатели в эксперименте. Существует много других различных постановок задач в регрессионном анализе, теории информации, где оценки параметров находятся, наоборот, из условия максимума энтропии.

В робастном оценивании значительной популярностью пользуются  $M$ -оценки.  $M$ -оценка неизвестного параметра  $x$  в (1) находится путем минимизации функции

$$M(x) = \left(1 / \sum_{i=1}^m v_i\right) \sum_{i=1}^m v_i \varphi(y_i - a_i x),$$

где  $v_i$  — весовой множитель;  $\varphi$  — некоторая функция, выполняющая роль метрики, например норма; индекс  $i$  обозначает  $i$ -ю координату.

В этом смысле энтропийную оценку для  $x$ , полученную из минимума функционала  $H(x, A)$ , можно интерпретировать как  $M$ -оценку при специально выбранных функциях  $\varphi$ .

Численная схема вычисления оценок  $x$  и  $A$  основана на рекуррентном методе вычисления оценок, приспособленном для этого случая [18]. Для поиска минимума применяется схема замороженных коэффициентов, которая известна в конфлюентном анализе [6]. Для некоторых начальных (замороженных) значений коэффициентов вычисляется вектор  $x_0$ , доставляющий минимум функционалу  $H(x, A)$ . Начальные значения коэффициентов всегда можно выбрать так, что функционал  $H(x, A)$  будет сильно выпуклым и минимум его может быть найден из уравнения Эйлера. Для найденного вектора  $x$  вычисляются весовые коэффициенты

$$\frac{1}{\gamma_i^2} \exp \left[ -\frac{(x_i - x_{i,0})^2}{\gamma_i^2} \right], \quad \frac{1}{\sigma_i^2} \exp \left[ -\frac{(a_i x - y_i)^2}{\sigma_i^2} \right].$$

Для них из уравнений Эйлера находится новый вектор  $x$ . Процесс повторяется до тех пор, пока отличия в решениях на соседних итерациях не будут находиться в пределах заданной точности.

Рассмотренная численная методика применялась к расчету числа Лява-К. Число Лява-К является фундаментальной геофизической постоянной, характеризующей внутреннее строение Земли. Из-за приливных деформаций Земли в приливо-образующем потенциале присутствует дополнительный потенциал  $\Delta U$ , причем  $\Delta U = KU$ . Используя закон сохранения момента количества движения, можно получить соотношение, позволяющее определить число Лява-К:

$$y(t) = Kx(t) + v(t),$$

где  $y(t)$  — результаты астрономических наблюдений приливной неравномерности вращения Земли;  $v(t)$  — ошибки наблюдений;  $x(t)$  — теоретическая функция приливной неравномерности:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{13} a_i \sin(\varphi_i + \omega_i t).$$

6°. Задачу отыскания корня в уравнении (1), говоря языком статистики, можно рассматривать как задачу оценивания параметра сдвига при аддитивной помехе, причем полезный сигнал представлен в виде произведения двух множителей,  $A$  и  $x$ , о которых имеется априорная информация в виде двух первых моментов,  $A_0$  и  $x_0$ . Математически эта запись имеет вид

$$y = Ax + \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — погрешность или ошибка аппроксимации или входных данных. Для изучения свойств решения уравнения (2) применим неравенство Крамера — Рао, которое устанавливает наиболее простые границы для среднеквадратических ошибок оценок  $x$  и  $A$  и является аналогом неравенства Коши — Буняковского в анализе



линейных нормированных пространств и аналогом соотношения неопределенности в квантовой теории. Оно требует столь больших, как и при байесовском подходе (см. п. 4°), статистических априорных сведений о померах и параметрах.

Примерами задач, допускающих такую интерпретацию, могут служить задачи определения дальности и скорости в радиолокации, измерения азимута и угла места при синтезе диаграммы направленности антенны, задачи из фурье-анализа и обработки фурье-спектров. В такого сорта задачах нельзя накладывать жесткие априорные ограничения на параметры задачи, как этого требует правило Байеса, так как для связи дисперсии этих параметров характерно соотношение типа неопределенности [20].

Вычтем из уравнения  $y = Ax$  уравнение  $y_0 = A_0x$ . Для уравнения

$$y - y_0 = (A - A_0)x$$

запишем неравенство Крамера — Рао для несмещенных оценок, которое будет иметь вид

$$M(x - x_0)(x - x_0)^T \geq ((A - A_0)^T \Phi_y (A - A_0))^{-1}.$$

По свойству матричных неравенств для квадратичных форм последнее можно переписать в виде

$$M((A - A_0)^T \Phi_y (A - A_0))^{1/2} M(x - x_0)(x - x_0)^T \times \\ \times M((A - A_0)^T \Phi_y (A - A_0))^{1/2} \geq E. \quad (3)$$

Взяв от левой и правой частей неравенства (3) функционал  $\text{Tr}(\cdot)$ , получим

$$M\|x - x_0\|^2 \cdot M\|A - A_0\|^2 \geq \text{Tr}\{\Phi_y^{-1}\}.$$

Выражение  $\text{Tr}\{\Phi_y^{-1}\}$  в силу формулы (2) можно записать в следующем виде:

$$\text{Tr}\{\Phi_y^{-1}\} = M \text{Tr}(y - Ax)(y - Ax)^T = M\|y - Ax\|^2. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$M\|x - x_0\|^2 \cdot M\|A - A_0\|^2 \geq M\|y - Ax\|^2. \quad (5)$$

Неравенство (5), записанное для выпуклых функций  $\varphi$ ,  $f$ ,  $\psi$  в виде.

$$f(\Phi_x(x - x_0)) \cdot \psi(\Phi_A(A - A_0)) \geq \varphi(\Phi_y(y - Ax)),$$

будет в дальнейшем пониматься как соотношение неопределенности для уравнения (1) [16]. Такие границы дают предел, ниже которого бесполезно улучшать точность оценок, и являются оценками снизу.

Пусть

$$U = \{x, A : f(\Phi_x(x - x_0)) \cdot \psi(\Phi_A(A - A_0)) \geq \varphi(\Phi_y(y - Ax))\}.$$

Назовем  $U$  множеством неопределенности решения (1) или (2) с приближенными данными  $A$ ,  $y$ . В регуляризации соотношение неопределенности называют обобщенной невязкой [21], из которой выбираются приближенные решения по априорным предположе-

ниям о них типа условий монотонности, выпуклости (вогнутости), унимодальности решения или решения с заданным числом экстремумов, «вариации» решения, истокообразности и т. д. В статистике же принято искать оценки, на которых достигается равенство в этом неравенстве, так как они обладают «хорошими» статистическими свойствами.

Настоящий метод интерпретации берет свое начало в теории планирования эксперимента, основоположником которой является Бокс. На примере такого метода интерпретации покажем, как соотносятся между собой устойчивые методы решения интегральных уравнений и математические методы планирования эксперимента [8] при решении задач линейной регрессии. В чем сходство и чем они могут дополнять друг друга? Для уяснения основной идеи проведем выкладки, на которые внимание автора настоящей статьи обратил Малютов.

В интегральном уравнении первого рода

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) z(s) ds$$

непрерывный аргумент  $s$  «дискретизируем» на сетке  $s_i = a + \Delta \cdot i$  и переобозначим  $\Delta s \cdot K(x, s_i) = f_i(x)$ , а  $z(s_i) = \theta_i$ . Получим приближенную запись для интегрального уравнения в виде регрессионной модели:

$$y(x) = \int_a^b K(x, s) z(s) ds \approx \sum_{i=1}^n K(x, s_i) z(s_i) \Delta s \approx \sum_{i=1}^n \theta_i f_i(x).$$

Эти выкладки указывают на тесную связь между методами решения интегральных уравнений и определения параметров  $\theta_i$  в регрессионных моделях с помощью теории планирования эксперимента. Это также подтверждается и исторически. Еще до создания устойчивых методов решения интегральных уравнений удавалось для частных случаев численно решать интегральные уравнения путем подбора на модельной задаче такой сетки по  $x$  и  $s$ , при которой достигался бы компромисс между обусловленностью информационной матрицей и точностью восстанавливаемого решения, т. е. по существу осуществлялась регуляризация «по шагу». С другой стороны, использование гребневых оценок в регрессионных задачах указывает на влияние и взаимопроникновение регуляризирующих методов при решении задач планирования эксперимента. Если такая связь существует, то можно ли решать интегральные уравнения традиционными дисперсионными методами теории планирования эксперимента, например с помощью метода вычисления  $D$ -оптимального плана, и по нему определять решение  $z(s_i)$ ? К сожалению, нельзя. Вычисление оценок  $\theta$  согласно неравенству Крамера — Рао в  $D$ -оптимальных планах опирается на минимизацию определителя информационной матрицы, что является очень сложной задачей для произвольных

функций  $\Delta s \cdot K(x, s_i) = f_i(x)$  не только в теории экстремальных задач, но и вообще в математике. Здесь происходит, по существу, замена задачи на более трудную. Она решается для специальных полиномов или для задач малой размерности, в общем же случае — не решается. Например, вычислительным приемом минимизации столь сложной функции в программе, составленной Дубовой [8], являлся случайный поиск, который, естественно, для случая произвольных функций в 99 случаях из 100 не находил глобального минимума за «среднее» время, которым располагал пользователь.

Операторы интегральных уравнений математической физики в своем большинстве являются вполне непрерывными, ядерными и прочими «нехорошими», с численной точки зрения, что, впрочем, характерно также и для большинства практических задач регрессионного анализа. В связи с этим для преодоления этих вычислительных трудностей в настоящем разделе предлагается использовать в качестве нормы более простую функцию типа 
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

где  $\lambda_i$  — собственное значение информационной матрицы. Записав неравенство Крамера — Рао в такой норме, как это сделано выше, можно получать оценки, более обозримые с точки зрения теории регуляризации и вычислительных методов экстремальных задач. Если дискретизовать в приведенной формуле и по аргументу  $x$  на сетке  $x_i = x_0 + h \cdot i$ , то мы получим условные алгебраические уравнения (1) и (2), а это и является основным численным приемом автоматизированного решения интегральных уравнений и линейных регрессионных задач с произвольными функциями и с применением устойчивых методов, что отмечено в работе [24].

В отличие от идеи Бокса [8] здесь предлагается:

во-первых, записывать неравенство Крамера — Рао в симметризованном виде, равноправном относительно  $x$  и  $A$ , и в привычном виде типа соотношения неопределенности;

во-вторых, качество оценки измерять не величиной, выраженной значением детерминанта, как это принято в  $D$ -оптимальных планах, а с помощью нормы, которая не дает вычислительных трудностей при увеличении размерности исследуемых оценок и напоминает привычный устойчивый метод наименьших квадратов;

в-третьих, использовать неравенство Крамера — Рао для отыскания оптимальных (несмещенных) в смысле этого неравенства оценок, минимизируя функционал

$$G(x, A) = (\|x - x_0\|_{\Phi_x}^2 \cdot \|A - A_0\|_{\Phi_A}^2 - \|y - Ax\|_{\Phi_y}^2)^2;$$

в-четвертых, получать апостериорные оценки с помощью неравенства Крамера — Рао.

7°. Одними из мощных средств исследования в области физики и химии при выяснении свойств и реакций взаимодействия яв-

ляются современные методы спектрального анализа. Автоматизация, обработки и интерпретации этих методов представляется важной и своевременной. Здесь описывается одна из возможных численных интерпретаций этой проблемы.

Впервые идея использования параметра, характеризующего информационную способность или качество спектрального прибора в экспериментальной спектроскопии, была высказана Конном. Затем на нее обратил внимание Сакай. По-видимому, эта идея понравилась и Беллу, который включил ее в свою книгу. Следуя работе [17], приведем здесь математическую переработку этой идеи, согласующую ее с методом наименьших квадратов.

В качестве количественной меры помехоустойчивости воспользуемся аналогом параметра качества спектральных приборов, который определяется как произведение отношения сигнала к шуму ( $C/\Pi$ ) на отношение спектра энергии к ширине самой узкой линии поглощения ( $M/F$ ), т. е. на параметр широкополосности. В спектроскопии такая величина называется мультиплексфактором:

$$Q \equiv \frac{C}{\Pi} \cdot \frac{M}{F} = \frac{\text{суммарная энергия в спектре}}{\text{энергия в наименьшей детектируемой линии}}. \quad (6)$$

Параметр широкополосности  $M/F$  для модели (2) в силу статистической независимости параметров  $x$  и  $A$  и нашей схемы оценивания представляется как произведение параметров широкополосности векторов  $x$  и  $A^{(v)}$ :

$$\frac{M}{F} = \frac{M_A}{F_A} \cdot \frac{M_x}{F_x} = \frac{\|A_0\|^2}{\|A - A_0\|^2} \cdot \frac{\|x_0\|^2}{\|x - x_0\|^2},$$

где норма  $\| \cdot \| = \text{Tr } zz^T$ , а  $z$  — вектор. Такая схема связана со случайностью матрицы  $A$  и имеет своей целью получение устойчивых решений уравнений (1), так как, возможно, мы имеем дело с вырожденной задачей. В помехоустойчивом оценивании такая постановка соответствует учету аномальных ошибок.

Выражение (6) для отношений энергии можно переписать в виде

$$Q \equiv \frac{\|y\|^2 \cdot \|A_0\|^2 \cdot \|x_0\|^2}{\|y - Ax\|^2 \cdot \|x - x_0\|^2 \cdot \|A - A_0\|^2}. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что величина  $Q$  будет максимальной, когда знаменатель минимален.

В основе действия части анализаторов лежит явление резонанса. Уравнение (7), по существу, является также «математическим анализатором»: при приближении  $A_x$  к  $y$ ,  $x$  — к  $x_0$ ,  $A$  — к  $A_0$  мы наблюдаем резонанс. Резонанс характеризуется двумя основными параметрами эксперимента — разрешающей способностью и временем установления анализатора. Известно, что чем больше разрешающая способность анализатора, тем больше необходимое время определения амплитуд. Из этого положения сле-

дует, что при заданном разрешении и требуемом времени определения знаменатель дроби не может быть сделан произвольно малым, а должен удовлетворять неравенству

$$\|y - Ax\|^2 \cdot \|x - x_0\|^2 \cdot \|A - A_0\|^2 \geq C_S,$$

где константа  $C_S$  характеризует данный спектрометр.

Запишем предыдущее неравенство не для норм, а для функций  $\varphi$ ,  $f$ ,  $\psi$  и  $\zeta$ , выполняющих роль метрик. Получим

$$\varphi(\Phi_y(y - Ax)) \cdot f(\Phi_x(x - x_0)) \cdot \psi(\Phi_A(A - A_0)) \geq C_S, \quad (8)$$

где

$$C_S \equiv \varphi(\Phi_y^{-1}) \cdot f(\Phi_x^{-1}) \cdot \psi(\Phi_A^{-1}).$$

Под решением вариационного неравенства (8) мы будем понимать оценки  $x$  и  $A$ , на которых достигается равенство в неравенстве (8) и которые являются минимизирующими экстремальными функционала

$$S(x, A) = \zeta(\varphi(\Phi_y(y - Ax)) \cdot f(\Phi_x(x - x_0)) \cdot \psi(\Phi_A(A - A_0)) - C_S),$$

$\zeta$  — выпуклая функция потерь.

Метод наименьших квадратов (8), записанный в виде соотношения неопределенности, описывает свойства средней остаточной энергии неразрешенного спектра, и выбор параметров уравнения происходит из условия ее минимизации.

8°. Одним из эффективных способов обработки и интерпретации наблюдаемых данных является метод регуляризации [2]. При решении некорректно поставленных задач он является для обработчика как бы «мнемоническим правилом», позволяющим обходить сложные вопросы, связанные с существованием (совместностью) и единственностью решения рассматриваемой задачи; особенно в случае, если обработчик считает эти вопросы «мало существенными» при работе на ЭВМ. Таким обработчикам применяемый метод в «корректной» форме напоминает об описанных выше краевых вопросах обработки и интерпретации данных. К таким двум классическим понятиям метод регуляризации добавляет третье — понятие приближенного решения, которое в каком-то смысле сходится к истинному.

С этой точки зрения метод регуляризации более привлекателен, нежели теория оценивания, так как он исходит из старых классических математических понятий. Однако если математическая модель задана в рандомизированной постановке типа (1) и входная и априорная информация формулируется в двух первых семи-вариантах, то неким аналогом метода регуляризации являются схемы оценивания, рассмотренные в пунктах 4°—7°. По сравнению с методом регуляризации — методикой нахождения приближенных решений — эти схемы представляют регуляризацию при фиксированном параметре  $\alpha$ , т. е. они не столь универсальны и позволяют лишь угадывать устойчивую запись «метода наименьших квадратов» в той или иной интерпретации. Поэтому соответствующие им функционалы мы будем называть интерпретирующими.

Обозначим отношение шум/сигнал ( $\mathcal{Ш}/\mathcal{С}$ ) через пару  $\alpha L, \beta K$ , где

$$\frac{\mathcal{Ш}}{C_x} = \Phi_x \Phi_y^{-1} = \alpha L, \quad \frac{\mathcal{Ш}}{C_A} = \Phi_A \Phi_y^{-1} = \beta K.$$

Тогда функционалы  $T(x, A), H(x, A), G(x, A), S(x, A)$  примут вид

$$\begin{aligned} T(x, A) &= \varphi(y - Ax) + \alpha f(x - x_0) + \beta \psi(A - A_0), \\ H(x, A) &= \varphi(y - Ax) \exp(-\alpha \varphi(y - Ax)) + f(x - x_0) \exp(-\alpha f(x - x_0)) + \\ &\quad + \psi(A - A_0) \exp(-\beta \psi(A - A_0)), \\ G(x, A) &= \zeta(\alpha f(x - x_0) \cdot \beta \psi(A - A_0) - \varphi(y - Ax)), \\ S(x, A) &= \zeta(\alpha f(x - x_0)) \cdot \beta (\psi(A - A_0) \varphi(y - Ax) - C_S). \end{aligned}$$

Выписывание функционалов для обобщенных приближенных решений на основании каких-то принципов — это с точки зрения теории регуляризации еще не все. Требуется еще показать, что когда погрешности в  $y$  и  $A$  стремятся к нулю (параметры  $\alpha$  и  $\beta \downarrow 0$ ), то оценки решений сходятся к истинным (асимптотические свойства). Для функционала  $T(x, A)$  мы исследовали подробно его асимптотические свойства. Функционал  $H(x, A)$  при стремлении  $\alpha$  и  $\beta \downarrow 0$  переходит в  $T(x, A)$ , и в этом смысле их асимптотические свойства одинаковы. Пределы значений  $x$  и  $A$ , найденных из  $G(x, A)$  и  $S(x, A)$ , с точностью до постоянных равны между собой и совпадают с обычным псевдорешением.

Если рассматривать функционалы с точки зрения статистики, то мы будем иметь дело с апостериорным оцениванием. Некоторые статистики скептически относятся к апостериорным оценкам («искать, где светло»): Однако при решении задач, являющихся некорректными (недопоставленными), привлечение априорной информации, как показало ее практическое применение, дает существенное улучшение результатов, причем методически теория некорректных задач в основном развивается в направлении оптимального использования априорной информации. Апостериорные оценки в этом смысле представляют богатый аналитический аппарат для получения приближенных решений. Однако исследование их асимптотических свойств при отношении шум/сигнал, стремящемся к нулю, для задач, рассмотренных в пунктах 4°—7°, не всегда является очевидным и простым. Учитывая приведенное скептическое отношение некоторых статистиков к апостериорным оценкам, направление, связанное с решением неустойчивых задач типа (1) в обработке (когда входные данные и априорная информация об искомым параметрах задаются пользователем в статистической терминологии), назвали статистической регуляризацией [11]. Впервые на такого рода некорректно поставленные задачи в математической физике было обращено внимание в работе [9].

Статистическое содержание этого направления заключается в значительном расширении с целью систематического использования класса оценок статистики и регрессионного анализа, не обладающих свойствами эффективности и состоятельности, за счет регуляризации этих оценок. Полученные оценки по терминологии Мура — Пенроза можно назвать псевдозффективными и псевдосостоятельными, по терминологии Тихонова — регуляризованными, или нормальными, по терминологии Цыпкина — аксельрантными [25].

Одной из основных статистических задач, возникающих при этом, является нахождение и вычисление асимптотических оценок

апостериорных интерпретирующих схем оценивания при  $\frac{1}{n} \frac{\Pi}{C} \rightarrow 0$

или  $\alpha \rightarrow 0$ , а также оценок, порождаемых абсолютно оптимальными или абсолютно оптимальными на классе алгоритмами регуляризации, идентификации и моделирования, которые позволяют на детерминистском языке интерпретировать байесовские и другие апостериорные оценки. Эти асимптотические свойства определяют как априорной информацией об искомом решении, так и о помехах.

Наряду с асимптотическими свойствами алгоритмов регуляризации неэффективных и несостоятельных оценок практический интерес представляют и свойства этих алгоритмов при конечных значениях моментов наблюдения  $n$ . В этом смысле в настоящее время наиболее распространенными являются регуляризирующие алгоритмы Воеводина, основанные на сингулярных разложениях, рекуррентные алгоритмы Жуковского — Липцера и методы минимизации риска на выборках ограниченного объема [10], удовлетворяющие определенному компромиссу между величиной, характеризующей ее «сложность», и величиной невязки по результатам косвенных экспериментов [29].

Помимо задач обработки в статистической регуляризации существует еще ряд важных проблем [22, 23, 26—28]. Рассмотренные в настоящей статье статистические методы решения обратных некорректно поставленных задач входят, в частности, в раздел математической физики, который называется обработкой и интерпретацией данных результатов эксперимента. Методика решения задач обработки за последние 25 лет изменялась, и из существовавших методик можно отметить такие, как метод максимального правдоподобия [6], теория планирования эксперимента [8] и метод регуляризации решения некорректных задач [2].

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Н. Тихонову за идеи, изложенные в п. 1°, а также за ряд полезных советов и замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О математических методах автоматизации обработки наблюдений. — В кн.: Проблемы вычислительной математики. — М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 3—17.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
3. Тихонов А. Н., Мелешко В. И. Регуляризованная статистическая идентификация при зашумленных входных и выходных переменных. — В кн.: Тез. докл. Всес. симпози. по обобщенно-обратным задачам идентификации сложных систем. — Харьков, 1979, с. 7—24.
4. Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. — Вестн. АН СССР, 1978, т. 15, № 6, с. 38—49.
5. Климов Г. П. Инвариантные выводы в статистике. — М.: Изд-во МГУ, 1973.
6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
7. Налимов В. В. Анализ трудностей, связанных с построением нелинейных по параметрам моделей в задачах химической кинетики. — Завод. лаб., 1978, т. 44, № 3, с. 325—330.
8. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971, с. 319.
9. Халфин Л. А. Информационная теория интерпретации геофизических исследований. — ДАН СССР, 1958, т. 122, № 6, с. 1007—1010.
10. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979.
11. Жуковский Е. Л. Статистическая регуляризация систем алгебраических уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 1, с. 185—191.
12. Жуковский Е. Л. Метод наименьших квадратов для вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1977, т. 17, № 4, с. 814—827.
13. Жуковский Е. Л. Об обобщенном решении систем линейных алгебраических уравнений. — ДАН СССР, 1977, т. 232, № 2, с. 269—272.
14. Жуковский Е. Л., Мелешко В. И. О помехоустойчивых решениях в линейной условной алгебре. — ДАН СССР, 1978, т. 241, № 5, с. 1009—1012.
15. Жуковский Е. Л. Неэнтروпийный принцип и регуляризация линейных систем. — ДАН СССР, 1979, т. 246, № 3, с. 1041—1045.
16. Жуковский Е. Л., Плискин С. Ю. Принцип неопределенности и регуляризация линейных систем алгебраических уравнений. — ДАН СССР, 1982, т. 262, № 6, с. 1301—1304.
17. Жуковский Е. Л. Соотношение неопределенности и интерпретация спектров различной природы. — ДАН СССР, 1982, т. 263, № 4, с. 847—850.
18. Берсенев С. И., Жуковский Е. Л., Киселев В. М. Обработка и энтропийная интерпретация данных. — Препринт ВЦСО АН СССР, № 14, — Красноярск, 1982, с. 30.
19. Жуковский Е. Л. Принцип неопределенности и устойчивая интерпретация результатов спектрометрического эксперимента. — В кн.: Математические задачи обработки эксперимента. — М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 3—12.
20. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. — М.: Сов. радио, 1969.
21. Морозов В. А. Об устойчивых численных методах решения совместных систем линейных алгебраических уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1984, т. 24, № 2, с. 179—186.
22. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г. О постановке некоторых некорректных задач математической физики. — Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 3, с. 559—576.
23. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. — Новосибирск: Наука, 1982.
24. Маркова Е. В., Денисов В. И., Полетаева И. А., Понома-



рев В. В. Дисперсионный анализ и синтез планов на ЭВМ. — М.: Наука, 1982.

25. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации. — М.: Наука, 1984.

26. Мелешко В. И. Об оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений. — ДАН СССР, 1980, т. 250, № 2, с. 280—284.

27. Чистяков В. П. Некоторые замечания о методе регуляризации. — ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1324—1326.

28. Цыпкин Я. З. Стабилизация и регуляризация оценок оптимальных решений при наличии неопределенности. — ДАН СССР, 1977, т. 236, № 2, с. 304—307.

29. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. / Под ред. В. Н. Вапника. — М.: Наука, 1984.

*А. М. Денисов, А. С. Крылов*

## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Задача решения интегральных уравнений I рода является некорректно поставленной [1]. В настоящее время для ее решения разработан ряд алгоритмов, основанных на методе регуляризации (см. [1, 2] и приведенную там литературу).

В данной статье рассматриваются вопросы численной реализации метода решения уравнений I рода, предложенного в [3, 4]. Сформулируем его в том виде, в каком он будет использоваться в данной работе.

Пусть дано операторное уравнение I рода

$$A\bar{x} = \bar{y}, \quad (1)$$

где  $A$  — линейный, вполне непрерывный оператор, действующий из  $H_1$  в  $H_2$  ( $H_1, H_2$  — сепарабельные гильбертовы пространства). Будем предполагать, что оператор  $A$  определен на всем  $H_1$  и  $\ker A = 0$ . Точная правая часть уравнения (1)  $\bar{y}$  неизвестна, а заданы элемент  $y_\delta$  и число  $\delta$ , такие, что  $\|y_\delta - \bar{y}\| \leq \delta$ .

Рассмотрим последовательность  $\varphi_i$  собственных функций оператора  $A^*A$ , упорядоченную по невозрастанию собственных значений, и множества

$$X_n = \left\{ x = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \|Ax - y_\delta\| \leq q \cdot \delta \right\}, \quad q = \text{const}, \quad q > 1.$$

Через  $n(\delta)$  обозначим минимальный номер  $n$ , при котором  $X_n \neq \emptyset$ .

При сделанных предположениях справедлива [4] следующая теорема.

**Теорема.** При  $\delta \rightarrow 0$

$$\sup_{x \in X_{n(\delta)}} \|x - \bar{x}\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, в качестве приближенного решения уравнения (1) можно рассматривать любой элемент множества  $X_{n(\delta)}$ .

Остановимся на вопросах применения этого метода для решения некоторых конкретных интегральных уравнений. При его численной реализации в качестве приближенного решения уравнения (1) выбирался элемент  $\bar{x}_{n(\delta)} = \sum_{i=1}^{n(\delta)} \bar{c}_i \varphi_i$ , множества  $X_{n(\delta)}$ , на котором достигается

$$\min_{x \in X_{n(\delta)}} \|Ax - y_\delta\|.$$

В качестве характеристик «размера» множества  $X_{n(\delta)}$  можно рассматривать числа  $\Delta c_j$ ,  $j = 1, \dots, n(\delta)$ , определяемые условием:  $\Delta c_j$  — максимальное число, при котором элемент

$$\tilde{x}_{n(\delta)} = \sum_{i=1, i \neq j}^{n(\delta)} \bar{c}_i \varphi_i + (\bar{c}_j + \Delta c_j) \varphi_j \quad (2)$$

принадлежит множеству  $X_{n(\delta)}$ .

При решении модельных задач схема численного эксперимента была следующей. Задавалось «точное» решение  $\bar{x}$ , по нему вычислялась «точная» правая часть  $\bar{y}$ . В  $\bar{y}$  вносилась ошибка и получалась функция  $y_\delta$ , такая, что  $\|\bar{y} - y_\delta\| < \delta$ . Затем по функции  $y_\delta$  и числу  $\delta$  находились  $\bar{x}_{n(\delta)}$  и числа  $\Delta c_j$ .

1°. Рассмотрим задачу приближенного решения уравнения Вольтерра I рода

$$Ax = \int_0^t x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, \pi], \quad (3)$$

которое соответствует задаче численного дифференцирования. Оператор  $A$  будем считать действующим из пространства  $L_2[0, \pi]$  в  $L_2[0, \pi]$ . Собственные функции оператора  $A^*A$  в этом случае равны  $\varphi_i(s) = \sqrt{2/\pi} \cos(i - 0,5)s$ .

Для уравнения (3) в качестве  $\bar{x}(s)$  была взята функция

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{2} e^{-6(s-1)^2} + e^{-6(s-2)^2}. \quad (4)$$

Приближенная функция  $y_\delta(t_j)$  задавалась следующим образом:

$$y_\delta(t_j) = \bar{y}(t_j) + \delta \delta_j^* / \delta^*, \quad (5)$$

где  $\delta_j^*$  — равномерно распределенные на  $[-1, 1]$  случайные числа,

$$\delta^* = \sqrt{\sum_{j=1}^M (\delta_j^*)^2 h}, \quad h = \pi/M, \quad M = 50.$$

Для анализа алгоритма были решены задачи с различными значениями величины  $\delta$  ( $\delta_1=0,1$ ,  $\delta_2=0,05$ ,  $\delta_3=0,01$ ). При фиксированном уровне погрешности  $\delta_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , уравнение (3) решалось для трех различных выборок случайных чисел  $\delta_j^*$ . Здесь и везде в дальнейших вычислениях величина  $q$  была взята равной 1,1.

Получены следующие результаты.

1)  $\delta_1=0,1$ . Для всех выборок  $n(\delta_1)=2$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$  — такие:

- а) первая выборка:  $c_1=0,5612$ ,  $c_2=-0,4989$ ,  $\Delta c_1=0,0366$ ,  $\Delta c_2=0,1096$ ;  
 б) вторая выборка:  $c_1=0,5595$ ,  $c_2=-0,5114$ ,  $\Delta c_1=0,0395$ ,  $\Delta c_2=0,1185$ ;  
 в) третья выборка:  $c_1=0,5609$ ,  $c_2=-0,5024$ ,  $\Delta c_1=0,0397$ ,  $\Delta c_2=0,1191$ .

2)  $\delta_2=0,05$ . Для всех выборок  $n(\delta_2)=5$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$  — такие:

- а)  $c_1=0,5603$ ,  $c_2=-0,5004$ ,  $c_3=-0,0610$ ,  $c_4=0,0998$ ,  $c_5=-0,2660$ ,  
 $\Delta c_1=0,0236$ ,  $\Delta c_2=0,0707$ ,  $\Delta c_3=0,1179$ ,  $\Delta c_4=0,1650$ ,  $\Delta c_5=0,2122$ ;  
 б)  $c_1=0,5594$ ,  $c_2=-0,5066$ ,  $c_3=-0,0529$ ,  $c_4=0,1099$ ,  $c_5=-0,2533$ ,  
 $\Delta c_1=0,0242$ ,  $\Delta c_2=0,0728$ ,  $\Delta c_3=0,1212$ ,  $\Delta c_4=0,1697$ ,  $\Delta c_5=0,2183$ ;  
 в)  $c_1=0,5601$ ,  $c_2=-0,5022$ ,  $c_3=-0,0483$ ,  $c_4=0,1007$ ,  $c_5=-0,2599$ ,  
 $\Delta c_1=0,0241$ ,  $\Delta c_2=0,0723$ ,  $\Delta c_3=0,1205$ ,  $\Delta c_4=0,1688$ ,  $\Delta c_5=0,2170$ .

3)  $\delta_3=0,01$ . Для всех выборок  $n(\delta_3)=7$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$  — такие:

- а)  $c_1=0,5595$ ,  $c_2=-0,5016$ ,  $c_3=-0,0579$ ,  $c_4=0,0991$ ,  $c_5=-0,2552$ ,  
 $c_6=0,0609$ ,  $c_7=0,1382$ ,  $\Delta c_1=0,0046$ ,  $\Delta c_2=0,0138$ ,  $\Delta c_3=0,0230$ ,  
 $\Delta c_4=0,0322$ ,  $\Delta c_5=0,0414$ ,  $\Delta c_6=0,0506$ ,  $\Delta c_7=0,0598$ ;  
 б)  $c_1=0,5594$ ,  $c_2=-0,5029$ ,  $c_3=-0,0523$ ,  $c_4=0,1011$ ,  $c_5=-0,2526$ ,  
 $[c_6=0,0580$ ,  $c_7=0,1374$ ,  $\Delta c_1=0,0048$ ,  $\Delta c_2=0,0144$ ,  $\Delta c_3=0,0240$ ,  
 $\Delta c_4=0,0336$ ,  $\Delta c_5=0,0432$ ,  $\Delta c_6=0,0528$ ,  $\Delta c_7=0,0624$ ;  
 в)  $c_1=0,5595$ ,  $c_2=-0,5020$ ,  $c_3=-0,0513$ ,  $c_4=0,0993$ ,  $c_5=-0,2540$ ,  
 $c_6=0,0601$ ,  $c_7=0,1364$ ,  $\Delta c_1=0,0047$ ,  $\Delta c_2=0,0142$ ,  $\Delta c_3=0,0237$ ,  
 $\Delta c_4=0,0332$ ,  $\Delta c_5=0,0427$ ,  $\Delta c_6=0,0522$ ,  $\Delta c_7=0,0616$ .

Результаты расчетов для всех  $\delta_i$  для первой выборки (случай (а)) приведены на рис. 1. Нами был также рассмотрен случай, когда приближенная функция  $y_6(t_j)$  находилась по формуле

$$y_6(t_j) = \bar{y}(t_j) + (-1)^T \delta / \sqrt{\pi}, \quad (6)$$

где  $T$  — случайная величина, принимающая с вероятностью 1/2 значения 0 или 1.

В этом случае  $n(\delta_1)=5$ ,  $n(\delta_2)=6$ ,  $n(\delta_3)=7$ , т. е. для  $\delta_1$  и  $\delta_2$  для восстановления модельной функции требуется большее число собственных функций оператора  $A^*A$  (при этом получающиеся решения  $\bar{x}_{n(\delta)}$  лучше приближают  $\bar{x}(s)$ ).

2°. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода, со-

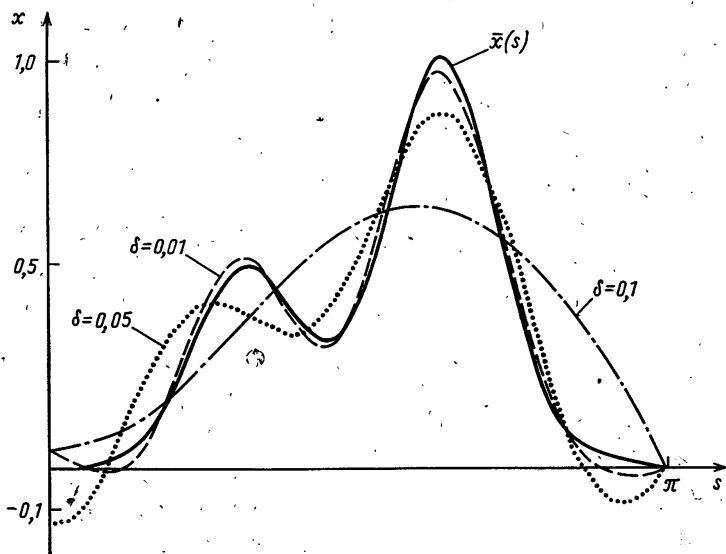


Рис. 1

ответствующее обратной задаче теплопроводности:

$$u(x, T) = A\varphi = \int_0^{\pi} K(x, s) \varphi(s) ds, \quad x \in [0, \pi],$$

где

$$K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 a^2 T} \sin nx \sin ns.$$

Оператор  $A$ , рассматриваемый действующим из  $L_2[0, \pi]$  в  $L_2[0, \pi]$ , является положительным и самосопряженным, и в качестве базиса  $\varphi_i$  можно брать его упорядоченные собственные функции  $\varphi_i(s) = \sqrt{2/\pi} \sin is$ .

Вычисления проводились для точного решения вида (4) по той же схеме, что и в случае численного дифференцирования. Были рассмотрены значения  $\delta_1=0,1$ ,  $\delta_2=0,01$ ,  $\delta_3=0,001$ ; значения  $M=100$ ,  $a^2 T=0,1$ .

Получены следующие результаты.

- 1)  $\delta_1=0,1$ . Для первой и второй выборок  $n(\delta_1)=2$ , для третьей выборки  $n(\delta_1)=1$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$  — такие:
  - а) первая выборка:  $c_1=0,7406$ ,  $c_2=-0,1477$ ,  $\Delta c_1=0,1052$ ,  $\Delta c_2=0,1420$ ;
  - б) вторая выборка:  $c_1=0,7376$ ,  $c_2=-0,1512$ ,  $\Delta c_1=0,1052$ ,  $\Delta c_2=0,1420$ ;
  - в) третья выборка:  $c_1=0,7342$ ,  $\Delta c_1=0,0098$ .

- 2)  $\delta_2=0,01$ . Для всех выборок  $n(\delta_2)=5$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$ —такие:
- а)  $c_1=0,7370$ ,  $c_2=-0,1477$ ,  $c_3=-0,0827$ ,  $c_4=0,1806$ ,  $c_5=-0,2099$ ,  
 $\Delta c_1=0,0116$ ,  $\Delta c_2=0,0156$ ,  $\Delta c_3=0,0257$ ,  $\Delta c_4=0,0518$ ,  $\Delta c_5=0,1273$ ;
- б)  $c_1=0,7367$ ,  $c_2=-0,1480$ ,  $c_3=-0,0831$ ,  $c_4=0,1800$ ,  $c_5=-0,2096$ ,  
 $\Delta c_1=0,0117$ ,  $\Delta c_2=0,0158$ ,  $\Delta c_3=0,0260$ ,  $\Delta c_4=0,0524$ ,  $\Delta c_5=0,1289$ ;
- в)  $c_1=0,7363$ ,  $c_2=-0,1472$ ,  $c_3=-0,0825$ ,  $c_4=0,1801$ ,  $c_5=-0,2078$ ,  
 $\Delta c_1=0,0118$ ,  $\Delta c_2=0,0159$ ,  $\Delta c_3=0,0262$ ,  $\Delta c_4=0,0528$ ,  $\Delta c_5=0,1298$ .
- 3)  $\delta_3=0,001$ . Для всех выборок  $n(\delta_3)=6$ . Значения  $c_j$  и  $\Delta c_j$ —такие:
- а)  $c_1=0,7366$ ,  $c_2=-0,1477$ ,  $c_3=-0,0828$ ,  $c_4=0,1811$ ,  $c_5=-0,2086$ ,  
 $c_6=-0,0886$ ,  $\Delta c_1=0,0009$ ,  $\Delta c_2=0,0012$ ,  $\Delta c_3=0,0019$ ,  $\Delta c_4=0,0038$ ,  
 $\Delta c_5=0,0095$ ,  $\Delta c_6=0,0284$ ;
- б)  $c_1=0,7366$ ,  $c_2=-0,1477$ ,  $c_3=-0,0829$ ,  $c_4=0,1810$ ,  
 $c_5=-0,2086$ ,  $c_6=-0,0864$ ,  $\Delta c_1=0,0008$ ,  $\Delta c_2=0,0011$ ,  
 $\Delta c_3=0,0019$ ,  $\Delta c_4=0,0038$ ,  $\Delta c_5=0,0093$ ,  $\Delta c_6=0,0280$ ;
- в)  $c_1=0,7365$ ,  $c_2=-0,1476$ ,  $c_3=-0,0828$ ,  $c_4=0,1810$ ,  
 $c_5=-0,2084$ ,  $c_6=-0,0860$ ,  $\Delta c_1=0,0009$ ,  $\Delta c_2=0,0012$ ,  
 $\Delta c_3=0,0020$ ,  $\Delta c_4=0,0040$ ,  $\Delta c_5=0,0097$ ,  $\Delta c_6=0,0293$ .

Результаты расчетов для всех  $\delta_i$  для первой выборки приведены на рис. 2. В случае решения обратной задачи с приближенной функцией  $y_0$ , определяемой соотношением (6), получены значения  $n(\delta_1)=2$ ,  $n(\delta_2)=5$ ,  $n(\delta_3)=7$ .

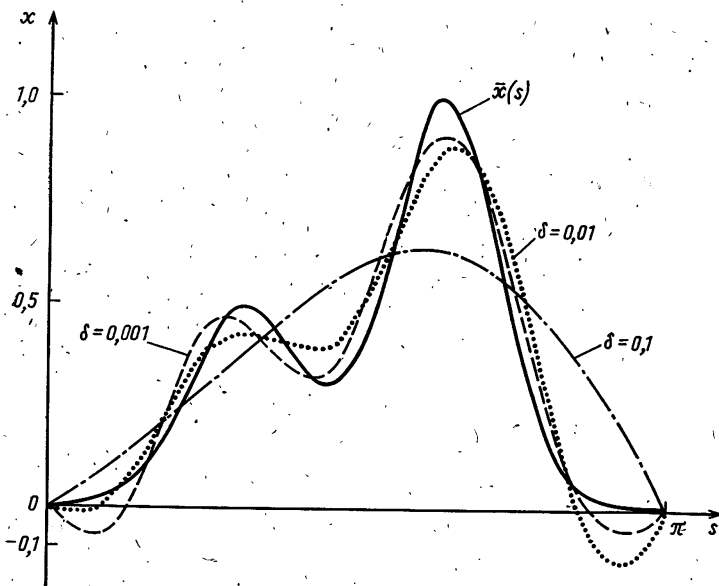


Рис. 2

3°. В предыдущих примерах рассматривались интегральные уравнения, для которых собственные функции оператора  $A^*A$  известны точно. Предположим, что собственные функции оператора известны нам приближенно:  $\|\varphi_i^\varepsilon - \varphi_i\| \leq \varepsilon$ . Определим множество

$$X_{m(\varepsilon)} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} d_i \varphi_i^\varepsilon, \|Ax - y_\delta\| \leq q \cdot \delta \right\},$$

и пусть  $m(\varepsilon, \delta)$  — минимальный номер, при котором  $X_{m(\varepsilon)}$  не пусто.

Рассмотрим невырожденный случай, когда множество  $X_{m(\varepsilon)}$  состоит более чем из одного элемента.

Теорема. При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $X_{m(\varepsilon, \delta)}$   $\alpha$ -сходится к  $X_{n(\delta)}$ .

Доказательство этой теоремы достаточно просто. Из нее следует, что при хорошей точности вычисления приближенных собственных функций в качестве приближенных решений уравнения мы можем рассматривать элементы множества  $X_{m(\varepsilon, \delta)}$ .

Задачу нахождения приближенных собственных функций можно решать, сводя ее к алгебраической, либо используя метод Келлога (см. [5—6]).

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$A\mu(\tau) = \int_0^T K(t-\tau)\mu(\tau) d\tau = u(x_0, t), \quad t \in [0, T],$$

с ядром

$$K(t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x_0}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right], & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau, \end{cases}$$

$$A: L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T].$$

Приближенные собственные функции оператора  $A^*A$  находились нами сведением задачи к алгебраической.

Для данного уравнения точное решение было взято равным

$$\bar{\mu}(\tau) = e^{-30(\tau-0.3)^2} + 2e^{-50(\tau-0.67)^2}, \quad T = 1.$$

В качестве характеристик «размера» множества  $X_{m(\varepsilon, \delta)}$  находились величины  $\Delta d_j^+$  и  $\Delta d_j^-$ ,  $j = 1, \dots, m(\varepsilon, \delta)$ :  $\Delta d_j^+$  и  $\Delta d_j^-$  — максимальные числа, при которых элементы

$$\tilde{x}_{m(\varepsilon, \delta)}^\pm = \sum_{i=1, i \neq j}^{m(\varepsilon, \delta)} \bar{d}_i \varphi_i^\varepsilon + (\bar{d}_j \pm \Delta d_j^\pm) \varphi_j^\varepsilon,$$

принадлежат множеству  $X_{m(\varepsilon, \delta)}$ .

Рассмотрены значения  $\delta_1=0,025$ ,  $\delta_2=0,01$ ,  $\delta_3=0,0025$  при  $x_0=1$ ,  $M=50$ .

Получены следующие результаты.

1)  $\delta_1=0,025$ . Для всех выборок  $m(\delta_1)=3$ . Значения  $d_j$  и  $\Delta d_j^\pm$  — такие:

а)  $d_1=0,7810$ ,  $d_2=0,5131$ ,  $d_3=-0,2022$ ,  $\Delta d_1^+=0,0376$ ,  
 $\Delta d_1^- = 0,0382$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0454$ ,  $\Delta d_2^- = 0,0474$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0654$ ,  
 $\Delta d_3^- = 0,0730$ ;

б)  $d_1=0,7760$ ,  $d_2=0,5096$ ,  $d_3=-0,2104$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0355$ ,  
 $\Delta d_1^- = 0,0355$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0427$ ,  $\Delta d_2^- = 0,0442$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0610$ ,  
 $\Delta d_3^- = 0,0686$ ;

в)  $d_1=0,7820$ ,  $d_2=0,5146$ ,  $d_3=-0,2245$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0417$ ,  
 $\Delta d_1^- = 0,0417$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0503$ ,  $\Delta d_2^- = 0,0517$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0724$ ,  
 $\Delta d_3^- = 0,0798$ .

2)  $\delta_2=0,01$ . Для всех выборок  $m(\delta_2)=5$ . Значения  $d_j$  и  $\Delta d_j^\pm$  — такие:

а)  $d_1=0,7790$ ,  $d_2=0,5149$ ,  $d_3=-0,2090$ ,  $d_4=0,1914$ ,  
 $d_5=-0,1679$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0186$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0189$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0230$ ,  
 $\Delta d_2^- = 0,0230$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0348$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0337$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0573$ ,  
 $\Delta d_4^- = 0,0528$ ,  $\Delta d_5^+ = 0,0719$ ,  $\Delta d_5^- = 0,0660$ ;

б)  $d_1=0,7770$ ,  $d_2=0,5135$ ,  $d_3=-0,2123$ ,  $d_4=0,1997$ ,  
 $d_5=-0,1591$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0185$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0187$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0228$ ,  
 $\Delta d_2^- = 0,0227$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0346$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0333$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0570$ ,  
 $\Delta d_4^- = 0,0521$ ,  $\Delta d_5^+ = 0,0716$ ,  $\Delta d_5^- = 0,0651$ ;

в)  $d_1=0,7794$ ,  $d_2=0,5155$ ,  $d_3=-0,2180$ ,  $d_4=0,1932$ ,  $d_5=-0,1493$ ,  
 $\Delta d_1^+ = 0,0193$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0196$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0238$ ,  $\Delta d_2^- = 0,0238$ ,  $\Delta d_3^+ =$   
 $= 0,0360$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0350$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0591$ ,  $\Delta d_4^- = 0,0549$ ,  $\Delta d_5^+ = 0,0742$ ,  
 $\Delta d_5^- = 0,0687$ .

3)  $\delta_3=0,0025$ . Для всех выборок  $m(\delta_3)=6$ . Значения  $d_j$  и  $\Delta d_j^\pm$  — такие:

а)  $d_1=0,7755$ ,  $d_2=0,5155$ ,  $d_3=-0,2133$ ,  $d_4=0,1948$ ,  $d_5=-0,1572$ ,  
 $d_6=-0,1468$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0048$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0049$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0059$ ,  $\Delta d_2^- =$   
 $= 0,0061$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0086$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0091$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0136$ ,  $\Delta d_4^- = 0,0149$ ,  
 $\Delta d_5^+ = 0,0171$ ,  $\Delta d_5^- = 0,0187$ ,  $\Delta d_6^+ = 0,0199$ ,  $\Delta d_6^- = 0,0211$ ;

б)  $d_1=0,7781$ ,  $d_2=0,5160$ ,  $d_3=-0,2147$ ,  $d_4=0,1932$ ,  $d_5=-0,1548$ ,  
 $d_6=-0,1448$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0049$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0050$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0060$ ,  $\Delta d_2^- =$   
 $= 0,0062$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0088$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0094$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0139$ ,  $\Delta d_4^- = 0,0153$ ,  
 $\Delta d_5^+ = 0,0174$ ,  $\Delta d_5^- = 0,0191$ ,  $\Delta d_6^+ = 0,0202$ ,  $\Delta d_6^- = 0,0216$ ;

в)  $d_1 = 0,7780$ ,  $d_2 = 0,5158$ ,  $d_3 = -0,2125$ ,  $d_4 = 0,1927$ ,  $d_5 = -0,1594$ ,  
 $d_6 = -0,1472$ ,  $\Delta d_1^+ = 0,0051$ ,  $\Delta d_1^- = 0,0052$ ,  $\Delta d_2^+ = 0,0062$ ,  $\Delta d_2^- =$   
 $= 0,0064$ ,  $\Delta d_3^+ = 0,0091$ ,  $\Delta d_3^- = 0,0097$ ,  $\Delta d_4^+ = 0,0144$ ,  $\Delta d_4^- = 0,0158$ ,  
 $\Delta d_5^+ = 0,0180$ ,  $\Delta d_5^- = 0,0198$ ,  $\Delta d_6^+ = 0,0209$ ,  $\Delta d_6^- = 0,0223$ .

Результаты расчетов для всех  $\delta_i$  для первой выборки приведены на рис. 3. В случае решения обратной задачи с приближенной функцией  $y_6$ , определяемой соотношением (6), получены значения  $m(\delta_1) = 4$ ,  $m(\delta_2) = 6$ ,  $m(\delta_3) = 7$ .

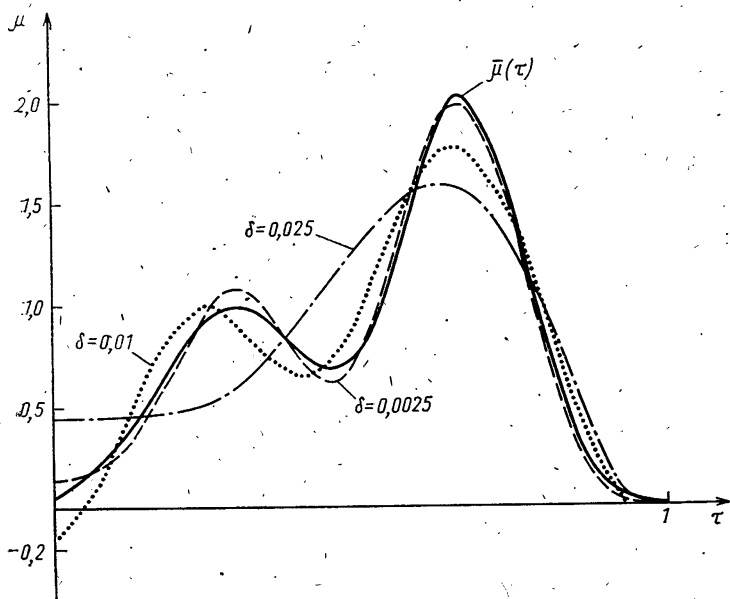


Рис. 3

### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.
3. Денисов А. М. О приближенном решении операторных уравнений I рода. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 3, с. 730.
4. Денисов А. М. Метод решения уравнений I рода в гильбертовом пространстве. — ДАН СССР, 1984, т. 274, № 3, с. 528.
5. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. — М.: Гостехиздат, 1949.
6. Баглай Р. Д., Смирнов К. К. К обработке двумерных сигналов на ЭВМ. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, т. 15, № 1, с. 241.



## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

### § 1. Постановка обратной задачи на полупрямой

1°. Рассмотрим задачу об определении при  $y > 0$  коэффициента  $a(y)$  в волновом уравнении

$$\omega_{tt} = a^2(y) \omega_{yy}, \quad y > 0, \quad t > 0,$$

при нулевых начальных данных

$$\omega(y, 0) = \omega_t(y, 0) = 0, \quad y > 0,$$

по известным краевым условиям

$$\omega(0, t) = \omega_0(t), \quad \omega_y(0, t) = \omega_1(t), \quad t \geq 0,$$

согласованным с начальными при  $y = t = 0$  в смысле  $\omega(0, 0) = \omega_0(0) = 0$ .

Всюду в дальнейшем будем полагать, что  $a(y) \in C^1[0, \infty)$  и что известна величина  $a(0) = a_0$ .

В работе [1] был предложен новый подход к исследованию проблемы существования и единственности решения обратной задачи Коши для волнового уравнения на прямой. В той же работе был построен регуляризирующий по Тихонову [2] алгоритм (р. а.) решения этой обратной задачи.

Вопросы разрешимости обратной краевой задачи для уравнения струны рассматривались ранее в [3—4]. Результаты этих работ, обосновавших существование и единственность решения данной обратной задачи, использовались при построении алгоритмов численного решения обратной динамической задачи сейсмике [5].

Целью настоящей работы является развитие метода [1] исследования проблемы разрешимости рассматриваемой обратной краевой задачи и создание на его основе р. а. решения в случае приближенно заданной информации. Предлагаемый в работе р. а. основан на сведении обратной задачи к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра I рода и дальнейшей его регуляризации введением малого параметра.

2°. Следуя [1], сведем исходную задачу к задаче определения при  $x \geq 0$  коэффициента  $z(x) \in C[0, \infty)$  в гиперболической системе относительно неизвестных функций  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ :

$$u_t - u_x - z(x)v = 0, \quad v_t + v_x + z(x)u = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где

$$x'(y) = \int_0^y \frac{1}{a(\xi)} d\xi, \quad z(x) = \frac{1}{2} \frac{c'(x)}{c(x)}, \quad c(x) = a(y(x)),$$

а  $y(x)$  — функция, обратная к  $x(y)$ .

В качестве дополнительных условий для определения  $z(x)$  из (1) рассмотрим

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$v(0, t) = \varphi(t), \quad \varphi(t) \in C^1[0; \infty), \quad (3)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad f(t) \in C^1[0; \infty). \quad (4)$$

Условия (2)—(4) соответствуют заданию краевых условий для римановых инвариантов  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  системы (1) относительно характеристик  $t+x=\text{const}$ ,  $t-x=\text{const}$ . При этом условие для уходящих от границы  $x=0$  характеристик является краевым в прямой задаче (1)—(3), а условие для приходящих к границе  $x=0$  характеристик является дополнительным в обратной задаче (1)—(4). С физической точки зрения эти условия означают задание уходящих от границы и приходящих к ней волн, рассеянных в результате дисперсии в неоднородной среде.

Принтегрировав первое из уравнений (1) вдоль характеристики вида  $t+x=\text{const}$ , получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра I рода для определения  $z(x)$  по  $f(t)$ :

$$\int_0^t v(x, 2t-x; z) z(x) dx = f(2t), \quad t > 0, \quad (5)$$

где через  $u(x, t; z)$ ,  $v(x, t; z)$  в дальнейшем будем обозначать решение прямой задачи (1)—(3) с коэффициентом  $z(x)$ .

Заметим, что из (5) следует, что равенство  $f(0) = 0$  является необходимым условием существования решения обратной задачи (1)—(4). Считая в дальнейшем это условие выполненным, будем рассматривать уравнение (5) при  $t \geq 0$ . При этом для исходной обратной задачи для волнового уравнения необходимое условие разрешимости принимает следующий вид согласования граничных условий:

$$\omega_0'(0) + a_0 \omega_1(0) = 0.$$

3°. Представим искомое решение задачи (1)—(3) (понимаемое как обобщенное в смысле Соболева) в виде следующего разложения:

$$u(x, t) = U(x, t), \quad v(x, t) = q\sigma(t-x) + V(x, t), \quad (6)$$

где  $U$ ,  $V$  удовлетворяют соответствующей краевой задаче,  $q = \varphi(0)$ .

**Теорема 1.** Существует единственное решение  $u, v \in C(\bar{D})$  задачи (1)—(3) для  $\varphi \in C[0; \infty)$ . Если же  $\varphi \in C^1[0; \infty)$ , то оно представимо в виде (6), причем  $U, V \in C^1(\bar{D})$ , где  $C^1(\bar{D})$  — класс непрерывных в  $D$  функций, имеющих непрерывные частные производные,  $\bar{D} \equiv \{x, t | x \leq t, x \geq 0, t \geq 0\}$ .

Корректность прямой задачи (1)—(3) вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.** Функции  $\{u, v\} \equiv \{\omega_1, \omega_2\}$ , решение задачи (1)—(3), непрерывны по граничным данным и по  $z$  на множестве

$D_{T,C} \equiv \{x, t; z | x+t \leq 2T, |z(x)| \leq C\}$  для любого  $T > 0$ , причем имеет место оценка

$$|w_i(x, t; z_1) - w_i(x, t; z_2)| \leq L_{1,i} \int_0^\eta \|z_1(\xi) - z_2(\xi)\|_{[0,\tau]} d\tau + \\ + L_{2,i} \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\|_{[0,2\eta]}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq x+t \leq \eta \leq T,$$

где  $\|y(\xi)\|_{[0,x]} = \max_{0 \leq \xi \leq x} |y(\xi)|$ , а  $L_{1,i}$  и  $L_{2,i}$  зависят лишь от  $\eta$ ,

$$\max_{i=1,2} \|z_i\|_{[0,\eta]}, \quad \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|_{[0,2\eta]}.$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на сведении системы (1) к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода путем интегрирования вдоль характеристик и использовании леммы Гронуолла для полученных на основе этой системы интегральных неравенств.

## § 2. Единственность и существование решения обратной задачи на отрезке

1°. Представим функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  в виде (6), где  $\varphi(t) \in C^1[0, \infty)$ , и пусть всюду в дальнейшем  $\varphi(0) = q \neq 0$ . Из (5), учитывая, что в силу теоремы 1

$$V(x, t) \in C^1(\bar{D}), \quad V(x, x) = 0,$$

получим уравнение

$$\frac{q}{2} z(t) + \int_0^t V_t(x, 2t-x; z) z(x) dx = f'(2t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где  $V_t(x, y)$  — значение частной производной по второму аргументу в точке  $(x, y)$ .

На основе полученного интегрального уравнения Вольтерра II рода (7) рассмотрим вопросы единственности и существования обратной задачи (1) — (4). При этом естественно ставить задачу об определении  $z(x)$  на произвольном отрезке, а уравнения (5), (7) рассматривать при  $0 \leq t \leq T$ .

Определим в пространстве  $C[0, T] \equiv B(T)$  оператор

$$A_q[x; z, \varphi, f] \equiv -\kappa \left\{ \int_0^x V_t(\xi, 2x-\xi; z) z(\xi) d\xi - f(2x) \right\}, \\ 0 \leq x \leq T, \quad \kappa = 2/q.$$

Очевидно, что  $A_q B(T) \subset B(T)$ .

Уравнение (7) может быть записано при этом в виде операторного уравнения второго рода

$$z(x) = A_q[x; z; \varphi, f]. \quad (8)$$

Л е м м а 1. Оператор  $A_q'$  является непрерывным по  $z(x)$ , и для  $z_1(x) = z_2(x)$  при  $0 \leq x \leq t \leq \tau \leq T$  имеет место неравенство

$$\|A_q'[x; z_1] - A_q'[x; z_2]\|_{[0, \tau]} \leq L \int_0^{\tau} \|z_1 - z_2\|_{[t, \xi]} d\xi.$$

Из леммы 1 непосредственно следует теорема единственности для задачи (1) — (4).

Т е о р е м а 3. Пусть для  $T > 0$  выполнены условия

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in C^1[0, 2T], \quad \varphi(+0) = \varphi(0) = q \neq 0, \\ f(t) &\in C^1[0, 2T], \quad f(0) = 0. \end{aligned}$$

Тогда обратная задача (1) — (4) не может иметь более одного решения  $z(x) \in C[0, T]$ .

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно показать, что единственность решения обратной задачи в  $C[0, T]$  будет иметь место при

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in C^{k+1}[0, 2T], \quad \varphi^{(i)}(+0) = \varphi^{(i)}(0) = 0, \quad 0 \leq i \leq k-1, \\ \varphi^{(k)}(+0) &= \varphi^{(k)}(0) = q_k \neq 0, \\ f(t) &\in C^{k+1}[0, 2T], \quad \varphi(0)^{(j)} = 0, \quad 0 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

2°. Из леммы 1 следует, что величина  $L$ , характеризующая сжимающие свойства оператора  $A_q'$ , имеет априорную оценку экспоненциально растущего типа. При этом, вообще говоря, ни сам оператор  $A_q'$ , ни какая-либо его целая степень не являются операторами сжатия на произвольном отрезке. Поэтому обратная задача (1) — (4) на произвольном отрезке  $[0, T]$ , вообще говоря, не имеет решения для произвольных  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  из  $C^1[0, 2T]$  при  $\varphi(0) \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Однако имеет место следующая

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для некоторого  $T^* \leq T$ ,  $T^* > 0$ , существует единственное решение  $z(x) \in C[0, T^*]$  обратной задачи (1) — (4), где  $T^*$  зависит от  $\varphi'(t)$  и  $f'(t)$ .

Доказательство основано на том факте, что по лемме 1 оператор  $A_q'$  является сжимающим на некотором отрезке  $[0, T^*]$ . В силу принципа сжатых отображений на этом отрезке будет существовать решение уравнения (8) из класса  $B(T^*)$ .

Введем банахово пространство

$$B_0^m(T) \equiv \{y(\xi) \mid y \in C^m[0, T], y^{(i)}(0) = 0, 1 \leq i+1 \leq m\}.$$

Тогда из теоремы 4 вытекает, что если  $f(t) \in B_0^1(2T)$ , то по ней однозначно восстанавливается  $z(x) \in B(T^*)$  для некоторого  $T^* > 0$ .

С другой стороны, для такой функции  $z(x)$  из  $B(T^*)$  след  $u(0, t)$  решения краевой задачи (1) — (3) принадлежит указанному классу  $B_0^1(2T^*)$ , что следует из теоремы 1.

Таким образом, доказано следующее

С л е д с т в и е 1. Для разрешимости обратной задачи (1) — (4)

в  $B(T^*)$  необходимо и достаточно, чтобы  $f(t) \in B_0^1(2T^*)$ , где  $T^*$  зависит от  $\varphi(t)$  и  $f(t)$ .

З а м е ч а н и е 2. Пусть выполнены условия замечания 1. Тогда для некоторого  $T^* \leq T$ ,  $T^* > 0$ , существует единственное решение  $z(x) \in B(T^*)$  обратной задачи (1) — (4), где  $T^*$  зависит от  $\varphi^{(k+1)}(t)$  и  $f^{(k+1)}(t)$ .

### § 3. Регуляризирующий алгоритм решения обратной задачи

1°. Пусть теперь исходная информация, функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  для решения обратной задачи (1) — (4), имеющей точное решение  $\bar{z}(x) \in B(T)$ ; задана приближенно, а именно:

$$\|\tilde{\varphi}(t) - \bar{\varphi}(t)\|_{C[0, 2T]} \leq h, \quad (10)$$

$$\|\tilde{f}(t) - \bar{f}(t)\|_{C[0, 2T]} \leq \delta, \quad (10')$$

где  $\bar{\varphi}(t)$ ,  $\bar{f}(t) \in C^1[0, 2T]$  — точные исходные данные,  $\tilde{\varphi}(t)$ ,  $\tilde{f}(t) \in C[0, 2T]$  — их приближенные значения. В этом случае обратная задача об определении  $z(x)$ , вообще говоря, не имеет решения при сколь угодно высокой точности входных данных  $\tilde{\varphi}(t)$  и  $\tilde{f}(t)$  и является тем самым некорректно поставленной.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha(z(t) - \theta) + \int_0^t v(x, 2t - x; z) z(x) dx = f(2t), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где  $v(x; t; z)$  — решение задачи (1) — (3) при  $v(0, t) = \varphi(t) \in C[0, 2T]$ .

Введем оператор

$$A_\alpha[x; z, \varphi, f] = -\lambda \left[ \int_0^x v(\xi, 2x - \xi; z) z(\xi) d\xi - f(2x) \right] + \theta, \quad \lambda = 1/\alpha.$$

Тогда уравнение (11) запишется в виде

$$z = A_\alpha[z, \varphi, f]. \quad (12)$$

Докажем, что при согласованном (во-первых, со знаком  $q = \bar{\varphi}(0)$ , во-вторых, с погрешностью  $h, \delta$  входных данных) выборе параметра  $\alpha$  уравнения (11), (12) определяют р. а. построения приближенного решения обратной задачи (1) — (4) на  $[0, T]$ .

Т е о р е м а 5. Пусть  $\tilde{\varphi}(t)$ ,  $\tilde{f}(t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$ ,  $\bar{f}(t)$  удовлетворяют условиям (10) и существует решение обратной задачи (1) — (4)  $\bar{z}(x) \in B(T)$  для  $\bar{\varphi}(t)$ ,  $\bar{f}(t)$ . Тогда, если  $\alpha = \alpha(\delta, h)$  таково, что  $\alpha q > 0$ , то при  $\varphi = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $f = \tilde{f}(t)$  уравнение (12) имеет единственное решение  $z_\alpha(t) \in B(T)$ ; если, кроме того,  $\alpha(\delta, h) \rightarrow 0$  и  $(\delta + h)/\alpha(\delta, h) \rightarrow 0$  при  $\delta, h \rightarrow 0$ , то  $z_\alpha(x) \rightarrow \bar{z}(x)$  в  $C[\tau, T]$  для любого фиксированного  $\tau$ , такого, что  $0 < \tau < T$ , причем имеет место оценка

$$\|z_\alpha(x) - \bar{z}_{v, \theta}\|_{C[0, T]} \leq r(\bar{z}, \alpha, \delta, h) =$$

$$= L_T [\exp\{-|q| \cdot |\alpha|^{p-1}\} + \omega(\bar{z}, |\alpha|^{p-1}) + \alpha|\bar{z}(0) - \theta|/q + (\delta + h)/|\alpha|],$$

где

$$\bar{z}_{v, \theta}(x) = \bar{z}(x) - (\bar{z}(0) - \theta)e^{-vx}, \quad v = \lambda q,$$

$$\omega(z, \Delta) = \sup_{|x-s| \leq \Delta} |z(x) - z(s)|, \quad 0 < p < 1.$$

Доказательство. Введем вспомогательный оператор

$$S_v[x; y] \equiv v \int_0^x e^{v(s-x)} y(s) ds, \quad v > 0,$$

для которого справедливо тождество

$$(E - S_v)[x; y] = \frac{1}{v} S_v[x; y'] + y(0)e^{-vx}.$$

Тогда, используя то, что

$$\frac{d}{dx} A_\alpha[x; z, \bar{\varphi}, \bar{f}] = v \{A'_\alpha[x; z, \bar{\varphi}, \bar{f}] - z(x)\}, \quad v = \lambda q,$$

из уравнения (12) получим относительно  $z(x)$  уравнение

$$z(x) = R_\alpha[x; z, \varphi, f] \equiv S_v[x; A'_\alpha[z, \bar{\varphi}, \bar{f}]] + \theta e^{-vx} + (E - S_v)[x; A_\alpha[z, \varphi - \bar{\varphi}, f - \bar{f}]]. \quad (13)$$

Покажем, что нелинейное операторное уравнение типа Вольterra II рода (13) разрешимо в условиях теоремы при  $\varphi = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $f = \tilde{f}(t)$ . Действительно, в силу теоремы 2 и леммы 1

$$\|R_\alpha[z_1, \varphi, f] - R_\alpha[z_2, \varphi, f]\|_{[0, t]} \leq L^* \int_0^t \|z_1 - z_2\|_{[0, \tau]} d\tau.$$

Отсюда следует, что оператор  $R_\alpha$  будет оператором сжатия в

$$Z_C \equiv \{z | z \in B(T), |z(x)| < C\}$$

по норме  $\|y\|_{[0, s]} = \max_{0 \leq \xi \leq s} |e^{-M\xi} y(\xi)|$ , эквивалентной исходной норме  $\|\cdot\|_{[0, s]}$ , с коэффициентом сжатия  $k = L^*/M = \beta/(1 + \beta) < 1$ ,  $\beta > 0$ , при соответствующем выборе  $M$ . Кроме того,

$$\|R_\alpha[z, \tilde{\varphi}, \tilde{f}] - \bar{z}_{v, \theta}\|_{[0, T]}^* \leq k \|z - \bar{z}_{v, \theta}\|_{[0, T]}^* + \rho,$$

где

$$\rho \leq 4 \|\bar{z}\|_{[0, T]} e^{-v\Delta} + 2\omega(\bar{z}, \Delta) + L|\bar{z}(0) - \theta|v + 2(\delta + L_{2,1}h)/|\alpha|.$$

При этом оператор  $R_\alpha$  в условиях теоремы отображает множество  $z_\rho \equiv \{z | \|z - \bar{z}_{v, \theta}\|_{[0, T]}^* \leq (1 + \beta)\rho\}$  на себя в норме  $\|\cdot\|^*$ , так как  $L, L_{2,1}$  равномерно ограничены при  $\delta, h \rightarrow 0$ .

В силу принципа сжатых отображений в  $z_\rho^*$  найдется единственная неподвижная точка  $z_\alpha$  оператора  $R_\alpha$ , являющаяся решением уравнения (13), а следовательно, и (12). Из неравенства

$$\|z_\alpha - \bar{z}_{v, \theta}\|_{[0, t]} \leq L^* \int_0^t \|z_\alpha - \bar{z}_{v, \theta}\|_{[0, \xi]} d\xi + \rho,$$

применяя лемму Гронуолла и полагая  $\Delta = |\alpha|^p$ , получим искомую оценку, что и доказывает теорему.

**З а м е ч а н и е 3.** Предлагаемый алгоритм является регуляризирующим и в том случае, когда для  $\bar{\varphi}(t)$  и  $\bar{f}(t)$  выполняются не условия теоремы 3, а условия замечания 1. В этом случае знак параметра регуляризации  $\alpha$  определяется соотношением:

$$\text{sign } \alpha = \text{sign } q_k, \quad k \geq 1.$$

Из теоремы 5 нетрудно получить, что если известно приближенное значение  $\theta$  функции  $z(x)$  при  $x=0$ , такое, что  $|\bar{z}(0) - \theta| \leq \varepsilon$ , то

$$|z_\alpha(x) - \bar{z}(x)| \leq r(\bar{z}, \alpha, \delta, h) + \varepsilon e^{-qx/a}.$$

2°. Вернемся теперь к исходной задаче — определению коэффициента  $a(y)$  при  $y > 0$  в волновом уравнении, если известны приближенно заданные краевые условия при  $0 \leq t \leq 2T < \infty$  и  $a(0) = a_0$ . При этом граничные условия для волнового уравнения пересчитываются в граничные данные для системы (1) и по ним с помощью построенного р. а. находится  $z_\alpha(x)$  при  $0 \leq x \leq T$ . Поскольку

$$c_\alpha(x) = a_0 \exp \left\{ 2 \int_0^x z_\alpha(\xi) d\xi \right\},$$

то тем самым в каждой точке  $y$  отрезка  $[0, Y_\alpha]$ ,

$$Y_\alpha = \int_0^T c_\alpha(x) dx,$$

определяется величина  $a_\alpha(y) = c_\alpha(x)$ , где

$$y = \int_0^x c_\alpha(\xi) d\xi.$$

Как нетрудно заметить, функция  $a_\alpha(y)$  будет регуляризованным приближением точно заданного коэффициента  $\bar{a}(y)$ , причем приближенно указываются не только значения функции, но и ее область определения.

Таким образом, задача определения коэффициента  $a(y)$  в указанной постановке полностью решена.

Остановимся теперь на более общей постановке обратной задачи об определении коэффициента  $a(y)$ , когда  $a(0) = a_0$  неизвестно. Такая постановка возникает, например, при решении обратной динамической задачи сейсмологии.

Пусть краевые условия исходной задачи имеют следующий вид:

$$\omega(0, t) = \omega_0(t), \quad \omega_y(0, t) = \mu\omega_1(t), \quad t \geq 0,$$

где  $\omega_0(t)$ ,  $\omega_1(t)$  — известные функции, а  $\mu > 0$  — неизвестный множитель. Тогда из условия согласования граничных условий однозначно определяется величина  $\mu a_0$ . При этом краевые условия для системы (1) приобретают вид

$$v(0, t) = \sqrt{\mu} \varphi(t), \quad u(0, t) = \sqrt{\mu} f(t),$$

где  $\varphi(t)$ ,  $f(t) \in C^1[0, \infty)$  — определяемые по исходным граничным данным функции. Поскольку система (1) является однородной по  $u$ ,  $v$ , то задача об определении коэффициента сводится к рассмотренной выше.

Предположим далее, что вместо величины  $a_0$  известен некоторый функционал  $F_l(a)$  от функции  $a(y)$ , взятой на отрезке  $[0, l]$ . Таким функционалом может быть, в частности, время распространения  $t_l$  волны от границы до некоторой известной точки  $y = l$ :

$$t_l = \int_0^l \frac{1}{a(y)} dy,$$

(в эквивалентной постановке это соответствует заданию эффективной скорости на отрезке  $[0, l]$ ).

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием корректности обратной задачи об определении  $a(y)$  является условие однозначной разрешимости относительно  $x$  уравнения:

$$\psi(x) = F_l(a), \quad \text{где } \psi(x) \equiv F_l\left(x \exp\left\{2 \int_0^y z(\xi) d\xi\right\}\right). \quad (14)$$

Так, если функция  $\psi(x)$  строго монотонна на отрезке  $[a_{0,\min}, a_{0,\max}]$  допустимых значений  $x$  (что выполняется в приведенном выше примере), то указанное условие разрешимости выполняется.

Построенный р. а. решения обратной задачи допускает эффективную численную реализацию, например, с помощью метода последовательных приближений для уравнения (11) или с помощью прямого решения алгебраической системы уравнений, получаемой из (11) путем интегрирования конечно-разностного решения задачи (1) — (3), и последующего решения уравнения (14).

В заключение автор выражает искреннюю признательность А. Н. Тихонову за постоянное внимание к работе и А. М. Денисову за обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баев А. В. О решении обратной задачи для волнового уравнения с помощью регуляризирующего алгоритма. — ДАН СССР, 1983, т. 273, № 3, с. 585—587.



2. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1, с. 49—52.

3. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. — ДАН СССР, 1954, т. 94, № 6, с. 13—16.

4. Благовещенский А. С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1971, т. 115, с. 28—38.

5. Алексеев А. С., Добринский В. И., Непричнов Ю. П., Семенов Г. А. К вопросу о практическом использовании теории обратных динамических задач сейсмологии. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 5, с. 1053—1056.

**А. С. Меченов**

## МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

До настоящего момента такой мощный аппарат математической статистики, как проверка гипотез и интервальное оценивание, в методе регуляризации решения линейных операторных уравнений первого рода использовался недостаточно. Его введение позволило бы ответить на многие вопросы: в частности, дать оценки дисперсий приближенных решений, проверить нуль-гипотезы для любого значения решения и т. д.

Поскольку часто при обработке результатов физических экспериментов для них имеются представления вида

$$y = X\beta + \varepsilon$$

с вырожденной матрицей  $X$ , где оценка ошибки в каждой точке правой части неизвестна, а оценка величины среднеквадратической погрешности неточна или невозможна, то возникает задача получения решения с гарантированным уровнем значимости.

Данная работа представляет собой попытку применения аппарата регрессионного анализа к методу регуляризации решения систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода и, наоборот, метода регуляризации в регрессионном анализе с последующей оценкой дисперсии решения и проверкой нуль-гипотез по критериям Стьюдента и Фишера — Снедекора.

Постановка задачи 1. Пусть  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)$  — вектор наблюдений в евклидовом пространстве  $R^N$ ;  $X$  — произвольное линейное многообразие размерности  $m+1$  с векторами  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Рассмотрим линейную стохастическую модель

$$y_k = \beta_0 x_{0k} + \beta_1 x_{1k} + \dots + \beta_m x_{mk} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, N},$$

где  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$  — неизвестные параметры;  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — вектор ошибок наблюдений со случайными компонентами, независимыми в совокупности, гомосцедастичными и имеющими многомерное нормальное распределение с нулевым вектором средних

значений и матрицей ковариаций  $\sigma^2 I_N$ ; матрица  $X = (x_0, x_1, \dots, x_m)$  плохо-обусловлена или вырождена.

Пусть также имеются из другого эксперимента  $m+1$  априорных данных о неизвестных параметрах  $\beta$ :

$$q_i = \beta_0 g_{0i} + \beta_1 g_{1i} + \dots + \beta_m g_{mi} + \varepsilon_i / \lambda, \quad i = \overline{0, m};$$

где матрица  $G = \{g_{ij}\}$  является невырожденной; ошибки наблюдений имеют многомерное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и гомоскедастичны;  $\lambda$  — неизвестное положительное число. В матричном виде такая модель записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X \\ G \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon / \lambda \end{bmatrix}, \quad (1)$$

и для нее ошибки наблюдений гетероскедастичны.

**Задача 1.** Зная наблюдение случайных векторов  $y$  и  $q$ , ковариационную матрицу этих векторов и матрицы  $X$  и  $G$ , оценить значения параметров  $\beta$  модели (1) таким образом, чтобы квадратичная форма

$$\begin{aligned} \min_{\beta \in R} \left( \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ G \end{bmatrix} \beta \right)' \begin{bmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \sigma^2 I / \lambda^2 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ G \end{bmatrix} \beta \right) = \\ = \min_{\beta \in R} \frac{1}{\sigma^2} [(y - X\beta)'(y - X\beta) - \lambda^2 (G\beta - q)'(G\beta - q)] = \\ = \frac{1}{\sigma^2} [(y - Xb)'(y - Xb) + \lambda^2 (Gb - q)'(Gb - q)] \end{aligned}$$

была бы минимальна и чтобы вариация  $b$  была бы минимальна.

**Постановка задачи 2.** Рассмотрим линейную стохастическую модель

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I),$$

где матрица  $X$  плохо-обусловлена или вырождена. Требуется построить приближение  $b$  к нормальному решению  $b_0$  [1, 2, 3],

$$\min_{\beta \in R^{m+1}} \|G(\beta - \beta_0)\|_{\sigma^2}^2 = \|G(b_0 - \beta_0)\|_{\sigma^2}^2,$$

где  $\beta_0$  — заданный вектор; матрица  $G$  невырождена и определена. Тогда задача минимизации функционала  $\|G(\beta - \beta_0)\|_{\sigma^2}$  на множестве  $\|X\beta - y\|_{\sigma^2}^2 \leq N$  приведет к минимизации регуляризирующего функционала  $\|X\beta - y\|_{\sigma^2}^2 + \lambda^2 \|G(\beta - \beta_0)\|_{\sigma^2}^2$ , где  $\lambda^2$  — множитель Лагранжа.

Сведем задачу 2 к задаче 1. Полагая  $G\beta_0 = q$ , подберем элементы матрицы  $G$  таким образом, что  $Gb_0 = q + \varepsilon/\lambda$ ,  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$  и отклонение искомого решения от априорной информации одинаково распределено с неизвестной заранее ошибкой  $\varepsilon/\lambda$ .

Тогда задачи 1 и 2 будут эквивалентны, поскольку приводят к минимизации одного и того же функционала:

$$\|X\beta - y\|_{\sigma^2}^2 + \lambda^2 \|G\beta - q\|_{\sigma^2}^2.$$

В этом случае:

1) оценка  $b$  вычисляется из системы линейных алгебраических уравнений

$$(X'X + \lambda^2 G'G)b = X'y + \lambda^2 Gq,$$

называемой системой нормальных уравнений в регрессионном анализе или уравнением Эйлера в методе регуляризации;

2) оценка метода наименьших квадратов  $b$  есть несмещенная оценка вектора  $\beta$ , имеющая матрицу ковариаций

$$\text{var } b = \sigma^2 C,$$

где

$$C = (X'X + \lambda^2 G'G)^{-1};$$

3) оценка метода наименьших квадратов имеет вариацию не большую, чем любая другая линейная, несмещенная оценка  $\beta$ ;

4) оценка  $b$  имеет нулевую корреляцию с вектором невязки

$$\begin{bmatrix} e \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - Xb \\ \lambda(q - Gb) \end{bmatrix};$$

5) несмещенная оценка для  $\sigma^2$  дается через экспериментальную вариацию.

$$s_e^2 = \frac{e'e + e_1'e_1}{N} = \frac{(y - Xb)'(y - Xb) + \lambda^2 (Gb - q)'(Gb - q)}{N};$$

6) случайные величины

$$t_j = \frac{b_j - \beta_j}{s_e \sqrt{C_{jj}}}, \quad j = \overline{0, m},$$

$$t_k = \frac{x_k b - y_k}{s_e \sqrt{x_k' C x_k}}, \quad k = \overline{1, N},$$

$$t_i = \frac{g_i b - q_i}{s_e \sqrt{g_i' C g_i}}, \quad i = \overline{0, m},$$

следуют распределению Стьюдента с  $N$  степенями свободы;

7) в предположении  $H_1: \beta_j = b_j, j = \overline{0, m}$  отношение

$$F\lambda = \frac{N}{m+1} \frac{(b - \beta)' X' X (b - \beta) + \lambda^2 (b - \beta)' G' G (b - \beta)}{(y - Xb)' (y - Xb) + \lambda^2 (Gb - q)' (Gb - q)}$$

есть случайная величина Фишера — Снедекора с  $m+1$  и  $N$  степенями свободы.

Отсюда, тестируя гипотезу  $H_0: \beta_j = 0, j = \overline{0, m}$ , определим ошибку первого рода  $\alpha$  из условия

$$F^\lambda = F_{1-\alpha}(m+1, N),$$

где  $F_{1-\alpha}(m+1, N)$  — квантиль случайной величины  $F$ .

Определим параметр  $\lambda$  из условия гомосцедастичности. Вычислим эмпирическую дисперсию для невязки каждого из экспериментов:

$$s_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (e_k - \bar{e})^2, \quad \bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_k,$$

$$s_q^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (e_{1i} - \bar{e}_1)^2, \quad \bar{e}_1 = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m e_{1i};$$

а также среднеарифметическое и среднегеометрическое этих величин:

$$s_a^2 = \frac{(N-1)s_y^2 + ms_q^2}{N+m-1},$$

$$s_g^2 = s_y^{\frac{N-1}{N+m-1}} \cdot s_q^{\frac{m}{N+m-1}}.$$

Тест гомосцедастичности использует статистику Бартлетта

$$B^\lambda = \frac{(N+m-1) \ln s_a^2 - (N-1) \ln s_y^2 - m \ln s_q^2}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{N-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+m-1} \right)}.$$

Поскольку величины  $e_k$  и  $e_{1i}$  нормально распределены, случайная величина  $B^\lambda$  следует приблизительно  $\chi^2$ -распределению с одной степенью свободы, когда гипотеза гомосцедастичности  $H_0: \text{var } \varepsilon = \sigma^2 I$  верна для всех  $\varepsilon$ . Изменяя значения параметра  $\lambda$ , будем искать

$$\min_{\lambda \in ]0, \infty[} B^\lambda,$$

что позволяет определить то значение  $\lambda^2$ , при котором значения невязки наиболее близки к гомосцедастичным, а также оценить вероятность невыполнения гомосцедастичности, что для задачи 2 будет говорить о неудачном выборе матрицы  $G$  и начального приближения  $\beta_0$ .

Данные результаты можно перенести на системы линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей и на решение линейных интегральных уравнений первого рода. В качестве примера рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x) + \varepsilon(x), \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad x \in [c, d],$$

где приближенное решение  $z_h$  ищется методом регуляризации [3]. Аппроксимация сглаживающего функционала согласно [4] приводит к вычислению решения  $z_h$  из системы линейных алгебраических уравнений

$$(A'A + \alpha C)z_h = A'u_h + \alpha Cz_0$$

с симметричными матрицами  $A'A$  и  $C$ . Поскольку матрица  $C$  представима в виде  $C = G'G$ , то эта система может быть записана в виде

$$[A'V\sqrt{\alpha}G'] \begin{bmatrix} A \\ \sqrt{\alpha}G \end{bmatrix} z_h = [A'V\sqrt{\alpha}G'] \begin{bmatrix} u_h \\ \sqrt{\alpha}Gz_0 \end{bmatrix},$$

т. е. будет являться нормальным уравнением для модели авторегрессии

$$\begin{bmatrix} A \\ G \end{bmatrix} z_h = \begin{bmatrix} u_h \\ Gz_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon V\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}.$$

**З а м е ч а н и е.** Тестирование согласно критерию Стьюдента позволяет вычислить такие значения матрицы  $G$ , для которых все величины  $t_j$ , соответствующие значениям решения  $z_h$  в различных точках  $s_j$ , были бы одинаковы, т. е. позволяет получить решение, равнозначное на всем отрезке, выбирая при этом значение параметра регуляризации из условия гомосцедастичности невязки правой части и невязки априорной информации  $z_0$ . Хорошо известные процедуры вычисления стандартной ошибки решения и экспериментальных данных позволяют получать обоснованную величину стандартного отклонения для каждого значения решения и экспериментальных данных, столь необходимую обычно в физических исследованиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hoerl A. E., Kennard R. W. Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. — *Technometrics*, 1970, v. 12, N 1, p. 55—67.
2. Marquardt D. W. Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Estimation, and Nonlinear Estimation. — *Technometrics*, 1970, v. 12, N 1, p. 591—612.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
4. Меченов А. С. О разностной аппроксимации метода регуляризации. — В сб.: *Обработка и интерпретация физических экспериментов.* — М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 105—111.

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

*Г. Т. Головин, М. М. Хапаев*

### К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ И С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При быстром нарастании тока в проводниках и достаточно большой проводимости материала проводников ток сосредотачивается на поверхности электродов (скин-эффект). При создании аппаратуры сверхсильных токов и импульсных устройств большой мощности [1, 2] важно уметь описывать явление скин-эффекта количественно, а именно полезным оказывается знание распределения магнитных полей в пространстве, поверхностных токов (скин-токов) по электродам, коэффициентов самоиндукции проводников и коэффициентов их взаимной индукции. Для определения этих величин в работах [3—6] были разработаны два численных метода, дополняющих друг друга.

#### § 1. Разностный метод

Скин-эффект описывается уравнениями магнитостатики [1]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \delta_{\Gamma}(P) \tilde{\mathbf{i}}, \quad P \in \Gamma, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля вне проводников;  $\tilde{\mathbf{i}}$  — плотность поверхностного тока на проводниках  $\Gamma_i$ ;  $\delta_{\Gamma}(P)$  — поверхностная дельта-функция.

Отсутствие магнитного поля внутри проводников, что является основным условием скин-эффекта, задается равенством

$$(H_n)_{\Gamma_i} = 0, \quad (3)$$

где  $H_n$  — нормальная компонента напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

В настоящей статье будем рассматривать электроды, обладающие осевой симметрией. На рис. 1 показано сечение области интегрирования системы (1)—(3). Внутренние электроды, представляющие собой два коаксиальных цилиндра  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , заключе-

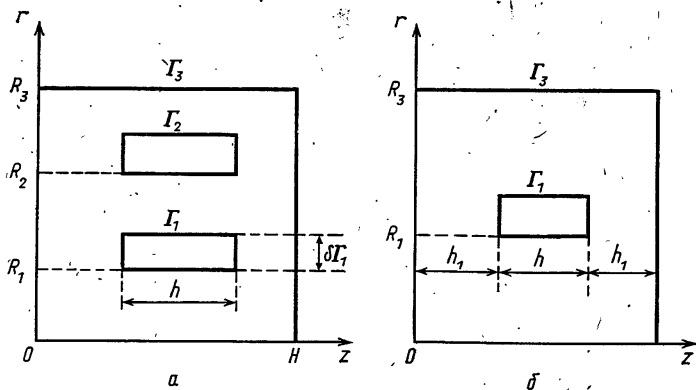


Рис. 1

ны во внешнем цилиндре-кожухе  $\Gamma_3$ . Уравнение (2) при условиях  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0$

принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0,$$

которое распадается на три уравнения для компонент  $A_r, A_\theta$  и  $A_z$ . Для рассматриваемого случая отлична от нуля лишь компонента  $A_\theta$ . Уравнение для определения  $A_\theta$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} = 0,$$

которое для потенциала  $\Phi = r A_\theta$  преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Потенциал  $\Phi$  имеет физический смысл потока магнитного поля. Из условия (3) вытекает равенство [1]:

$$\Phi|_{\Gamma_i} = \text{const}. \quad (5)$$

Значения констант в (5) на электродах в общем случае неизвестны. Определение их и составляет одну из трудностей задачи. На практике обычно задается величина полного тока  $I_i$ , текущего по каждому электроду  $\Gamma_i$ . В работе [3] показано, что с помощью некоторой вспомогательной вычислительной процедуры значения констант в (5) могут быть определены через заданные токи  $I_i$ .

Алгоритм определения магнитных полей с помощью предложенного в [3] разностного метода распадается на два этапа. На первом этапе решаются вспомогательные краевые задачи (4), (5), число которых совпадает с числом проводников  $\Gamma_i$ . После решения этих задач определяются величины констант в (5) через текущие по проводникам  $\Gamma_i$  токи  $I_i$ . Одновременно собирается и

запоминается информация для определения коэффициентов индукции  $L_{ij}$ . На втором этапе решается основная краевая задача (4), (5) с найденными на первом этапе значениями констант в (5). После определения потенциала  $\Phi$  компоненты напряженности магнитного поля  $H_r$  и  $H_z$  определяются путем численного дифференцирования потенциала  $\Phi$  по формулам

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (6)$$

Затем по алгебраическим формулам без существенных дополнительных затрат времени ЭВМ определяются коэффициенты самоиндукции  $L_{ii}$  и коэффициенты взаимной индукции  $L_{ij}$  проводников  $\Gamma_i$ .

Основным моментом, определяющим эффективность предложенного в [3] разностного метода, является численное решение краевой задачи (4), (5). Реальная геометрия проводников, за редким исключением, приводит к необходимости решать трехмерные краевые задачи типа (4), (5) в областях сложной формы на существенно неравномерных сетках. Решение таких задач в настоящее время практически невозможно. Поэтому предложенная методика эффективна лишь для областей, для которых уравнение (4) является двумерным, например для осесимметричных областей. Однако даже в этом случае решение краевой задачи (4), (5) не является простым делом, поскольку толщина электродов и расстояние между ними по сравнению с размерами системы малы. В силу этого края электродов и на практике и в расчете округляются сферическими поверхностями большой кривизны (фаска), так что значения напряженности магнитного поля вблизи этих краев на несколько порядков превышают аналогичные величины вдали от них (см. рис. 3, 4).

Для точного решения уравнения (4) разностным методом приходится вводить неравномерную пространственную сетку, шаги которой вблизи углов и краев электродов и в промежутке между ними на 3—4 порядка меньше шагов сетки вдали от проводников. Для решения алгебраической системы уравнений, получающейся от замены уравнения (4) его разностным аналогом на такой сетке, приходится применять метод матричной прогонки, на что и тратится основное время ЭВМ в предложенном методе. Отметим также, что для рассматриваемой области (прямоугольник с вырезанными из него узкими длинными полосами), как, впрочем, и для других областей сложной (не прямоугольной) формы, реализация метода матричной прогонки не является тривиальной [7].

## § 2. Метод интегральных уравнений

Описанную выше аксиально-симметричную двумерную задачу магнитостатики нетрудно сформулировать в виде интегральных уравнений относительно плотности поверхностного тока в провод-



нике. Введем предварительно некоторые обозначения. Пусть  $\Gamma$  — образующая поверхности проводящих тел на плоскости декартовых координат  $(r, z)$ ,  $r > 0$ : Кривая  $\Gamma$  может быть как замкнутой, так и разомкнутой, а также многосвязной. Случай разомкнутых частей кривой  $\Gamma$  соответствует бесконечно тонким проводникам (например, экран, тонкие плоские электроды). Пусть  $(r(s), z(s))$  — параметризация  $\Gamma$ ,  $s$  — ее натуральный параметр. Обозначим через  $j(s)$  плотность поверхностного тока в проводнике и составим для нее интегральное уравнение. Для этого используем функцию

$$G(M, M_0) = \frac{rr_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2}} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - a \cos \varphi}} = \\ = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right],$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы,

$$a = \frac{2rr_0}{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2}, \quad k^2 = \frac{4rr_0}{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Функция  $G(M, M_0)$  является фундаментальным решением уравнения (4) и может быть легко получена из формул для компоненты векторного потенциала  $A_\theta$  [8, 9]. Интегрируя функцию  $G(M, M_0)$  по кривой  $\Gamma$  и обращаясь к соотношению (5), получим интегральное уравнение

$$\int_\Gamma G(M(s), M(s_0)) j(s) ds \Big|_{M(s_0) \in \Gamma_i} = \Phi_i. \quad (7)$$

Значения  $\Phi_i$  на кривых  $\Gamma_i$ , как правило, заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи из условия

$$I_i = \int_{\Gamma_i} j(s) ds. \quad (8)$$

Величина  $I_i$  в (8) имеет физический смысл полного тока в  $i$ -м проводнике. Типичной является ситуация, когда на части кривых  $\Gamma_i$ ,  $i = k_1, k_2, \dots, k_p$ , задается значение потока магнитного поля  $\Phi_i$  (например, на кожухе электротехнических устройств обычно  $\Phi_i = 0$ ). Для других частей  $\Gamma_i$ ,  $i = m_1, m_2, \dots, m_q$ , известна лишь величина  $I_i$ , а значение  $\Phi_i$  неизвестно. Поэтому для таких кривых  $\Gamma_i$  будем искать отличные от нуля решения однородного уравнения

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial s_0} G(M(s), M(s_0)) j(s) ds = 0, \quad M(s_0) \in \Gamma_i, \quad i = m_1, \dots, m_q, \quad (9)$$

удовлетворяющие дополнительным условиям (8). Уравнение (9) получено из (7) с помощью дифференцирования и не содержит неизвестной правой части. Окончательно, решается система, состоящая из уравнений вида (7) для  $i=k_1, \dots, k_p$  и уравнений (9), дополненных соотношениями (8) для  $i=m_1, \dots, m_q$ .

Главная часть ядра уравнений вида (7) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Уравнения (9) являются сингулярными с главной частью Коши или Гильберта в зависимости от того, является ли кривая  $\Gamma_i$  замкнутой или разомкнутой. В работах [4—6] проведено исследование таких уравнений и предложен численный метод, ориентированный на решение систем, часть уравнений которых сингулярные, а остальные имеют в ядре логарифмическую особенность. При этом дополнительные условия (8) естественным образом учитываются в ходе численного решения.

Численный метод для решения изучаемых интегральных уравнений подробно описан в работах [4—6] и основан на аналитическом обращении главной части интегрального оператора и редукции задачи к системе уравнений второго рода. Численно решается система интегральных уравнений второго рода — стандартная задача математической физики. В реализованном в настоящее время на ЭВМ алгоритме все вычисления проводятся на равномерных по параметру сетках, введенных на каждой кривой  $\Gamma_i$ . Точность всех вычислений не хуже  $O(h^2)$ . Численный метод допускает применение и неравномерных сеток, однако, как показали численные эксперименты по существенному увеличению числа равномерных узлов и сравнение с разностным методом, полученные на равномерной сетке результаты имеют достаточную точность.

Алгоритмически интегральный метод состоит из трех этапов. На первом этапе производится заполнение матрицы системы сеточных уравнений. Этот этап является наиболее трудоемким с точки зрения затрат времени ЭВМ. На втором этапе эта система решается с помощью метода Гаусса. После этого производится обработка результатов расчетов, т. е. с помощью найденного значения плотности поверхностного тока вычисляются все искомые величины задачи: индуктивные коэффициенты, поля и т. д. Так, потоки магнитного поля  $\Phi_i$  связаны с индуктивными коэффициентами  $L_{ij}$  формулой [9]

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_j L_{ij} \cdot I_j, \quad (10)$$

Выбирая  $I_j=0$ , если  $j \neq m_0$ , и  $I_j=1$ , если  $j=m_0$ , вычисляя затем  $\Phi_i$ ,  $i=1, \dots, N$  ( $N$  — число кривых), с помощью (10) получаем значения индуктивных коэффициентов.

Отметим, что существенным элементом предложенного в [4—6] интегрального подхода является широкое использование аппа-

рата сингулярных интегральных уравнений как на уровне постановки задачи, так и при построении численного алгоритма.

Преимущества метода интегральных уравнений по сравнению с сеточным такие: 1) возможность решения задач в неограниченных областях; 2) проводники могут быть бесконечно тонкими; 3) программный аппарат пригоден для расчета систем проводников разной геометрии, так как число кривых и их параметризация являются входными данными для расчета. К проблемам, возникающим при решении задачи с помощью интегральных уравнений, можно отнести следующие: 1) в настоящее время в области интегральных уравнений мало исследованы задачи с угловыми точками на кривой интегрирования; не выяснился этот вопрос и в настоящей работе; 2) имеются вычислительные трудности при вычислении полей и потенциалов вблизи поверхности проводника. Эти трудности связаны с резким изменением ядер потенциала простого слоя при приближении точки наблюдения к кривой  $\Gamma$ .

Отметим, что часто в прикладных задачах картину магнитного поля требуется определить лишь в некоторой части пространства. В такой ситуации удобно использовать комбинацию разностного метода и метода интегральных уравнений. Интегральный подход нужно использовать для определения общих интегральных характеристик, а разностный метод — для эффективного и точного определения искомых полей и потенциалов.

### § 3. Результаты расчетов

Расчеты обоими методами проводились в осесимметричной области с одним или двумя контурами  $\Gamma_i$ , заключенными в кожух  $\Gamma_3$  (см. рис. 1). Результаты расчетов представлены в табл. 1. Обозначения в ней следующие:  $R_i$  — радиусы контуров  $\Gamma_i$  (рис. 1);  $h$  — длина внутренних контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ;  $H$  — длина внешнего контура-кожуха  $\Gamma_3$ ;  $\Delta$  — расстояние между контурами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ;  $\delta\Gamma_1$  и  $\delta\Gamma_2$  — толщины контуров, а  $I_1$  и  $I_2$  — текущие по ним токи;  $c_1$  и  $c_2$  — полученные в (5) из расчетов значения констант,  $L_{ij}$  — индуктивные коэффициенты.

Из табл. 1 видно, что при малой толщине  $\delta\Gamma_1$  и  $\delta\Gamma_2$  стенок внутренних контуров величины индуктивных коэффициентов, полученных разностным методом, отличаются от соответствующих величин, полученных интегральным методом, не более, чем на 2% (варианты 3, 4 и 8, 9). В то же время видно, что увеличение толщины стенок контуров существенно изменяет величины индуктивных коэффициентов (варианты 1—3, 7, 8). Расчеты разностным методом проводились и при  $\delta\Gamma_i < 0,01$  см. Было обнаружено, что индуктивные коэффициенты при таких  $\delta\Gamma_i$  мало отличаются от их значений при  $\delta\Gamma_i = 0,01$  см. Варианты 5—16 иллюстрируют характер изменения индуктивных коэффициентов при изменении размеров электродов в области, имеющей два внутренних контура. Видно, что при изменении размеров электродов индуктивные коэффициенты изменяются весьма существенно.

Таблица 1

Номер варианта	Метод	Входные данные										Результаты расчетов					
		$R_1$	$R_2$	$R_3$	$n$	$H$	$\Delta$	$\delta \Gamma_1$	$\delta \Gamma_2$	$I_1$	$I_2$	$c_1$	$c_2$	$L_{11}$	$L_{22}$	$L_{12}$	
1	Разн.	28	30	60	30	75	1	1	1	1	1	-1	-3,845	-7,480	439	462	415
2	»	28,9	30	60	30	75	1	0,1	0,1	1	1	-1	3,939	-7,212	476	498	451
3	»	28,99	30	60	30	75	1	0,01	0,01	1	1	-1	4,068	-7,443	490	511	464
4	Интегр.	29	30	60	30	75	1	0	0	1	1	-1	—	—	482	503	456
5	Разн.	28	30	45	30	75	1	1	1	1	1	-1	4,803	-6,426	378	388	348
6	»	28	30	60	30	50	1	1	1	1	1	-1	4,031	-6,878	377	497	352
7	»	13	15	23	10	25	1	1	1	1	1	-1	5,664	-8,456	209	227	172
8	»	13,99	15	23	10	25	1	0,01	0,01	1	1	-1	6,403	-8,932	256	271	215
9	Интегр.	14	15	23	10	25	1	0	0	1	1	-1	—	—	255	269	214
10	Разн.	58	60,5	120	50	150	1,5	1	1	1	1	-1	7,310	-13,02	1047	1063	999
11	Интегр.	30	30,5	60	30	75	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	505	515	490
12	»	30	30,5	60	60	100	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	314	323	310
13	»	30	30,5	60	60	150	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	322	328	315
14	»	60	60,5	120	30	75	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	1264	1276	1230
15	»	60	60,5	90	30	75	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	1182	1189	1147
16	»	60	60,5	90	30	100	0,5	0	0	1	1	-1	—	—	1302	1308	1267

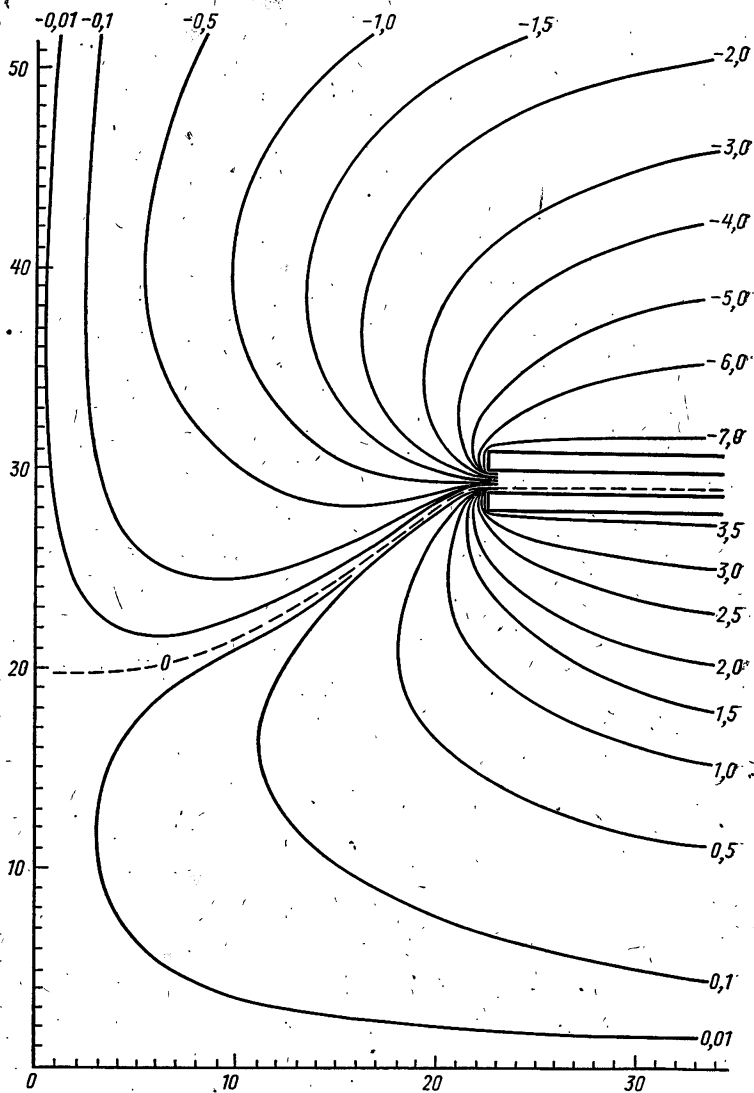


Рис. 2. Эквипотенциали функции  $\Phi$

На рис. 2—4 для первого из вариантов табл. 1 приведены эквипотенциали функции  $\Phi$ ,  $1000H_r$  и  $1000H_z$ , а на рис. 5, 6 показано распределение плотности поверхностного тока по контурам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Из приведенных рисунков видно, что вблизи углов контуров функции  $\Phi$ ,  $H_r$  и  $H_z$  имеют большие градиенты. Поэтому в расчетах разностным методом углы контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  скруглялись окружностями радиуса  $R_0=0,01$  см, а шаги сетки вблизи этих окружностей брались существенно меньшими, чем вдали от них. Например, в варианте 1 сетка имела следующие характеристики.

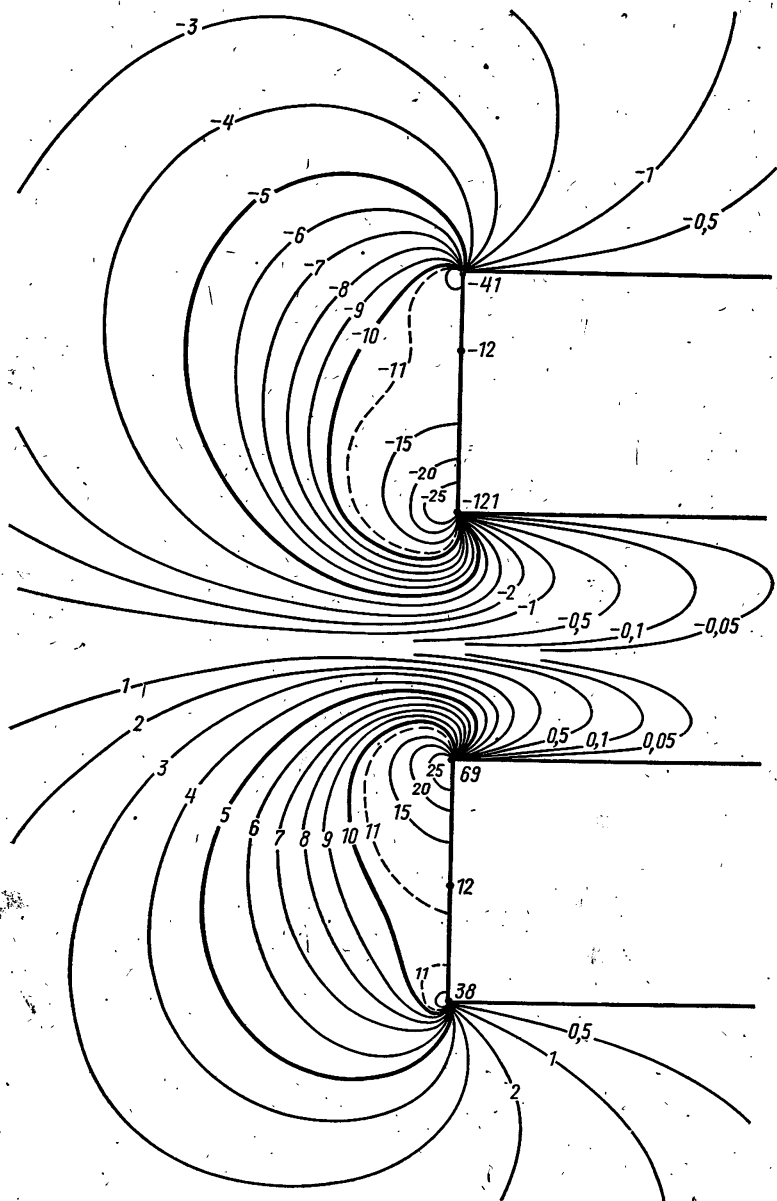


Рис. 3. Эквипотенциали функции  $1000 H_r$ .

Число шагов по направлению  $r$  было равно 94, а по направлению  $z$  — 62. Шаги сетки у поверхностей электродов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  по каждому направлению имели порядок  $10^{-3}$  см, а максимальный шаг у контуров  $\Gamma_3$  был равен 6,5 см. Сетка сгущалась к поверхности

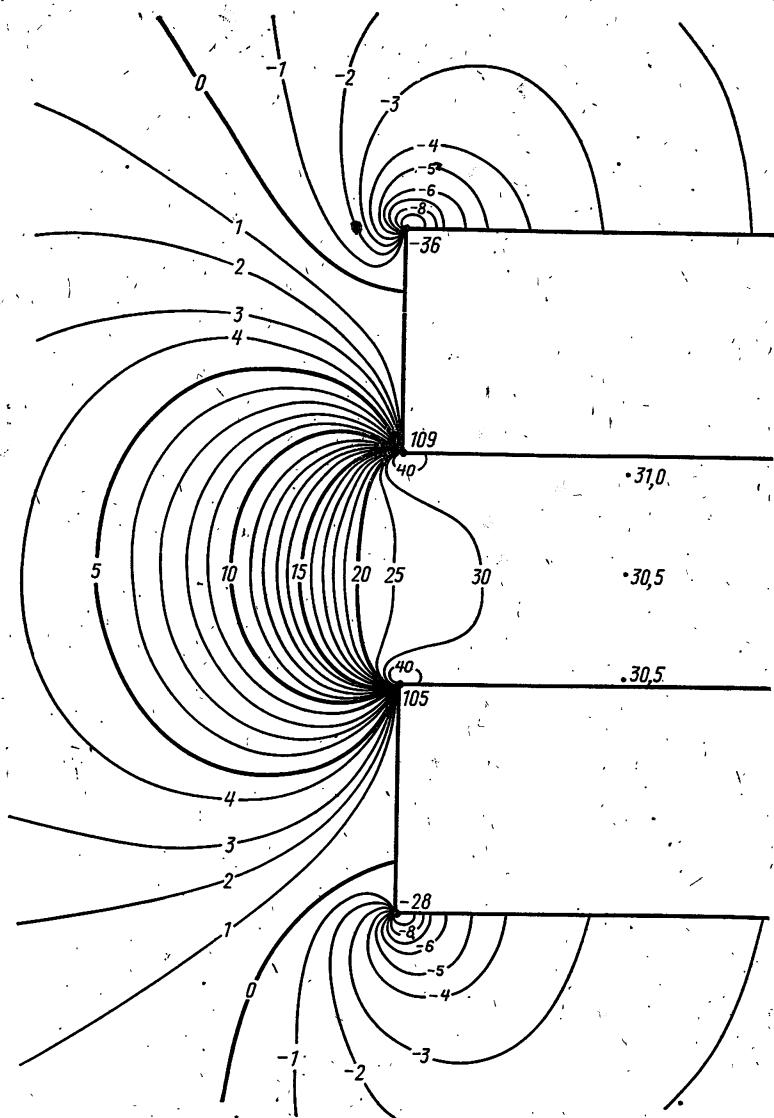


Рис. 4. Эквипотенциали функции  $1000 \text{ Hz}$

электродов по геометрической прогрессии с коэффициентами разгона 2. Матричная прогонка осуществлялась по направлению  $r$ . Время решения одной краевой задачи с фиксированным потенциалом на контурах  $\Gamma_i$  на указанной сетке составляло 3 мин 20 с. В это время входит и время вычисления обратных матриц. Язык программирования — ФОРТРАН. ЭВМ — БЭСМ-6. Обратные матрицы хранились на магнитном диске.

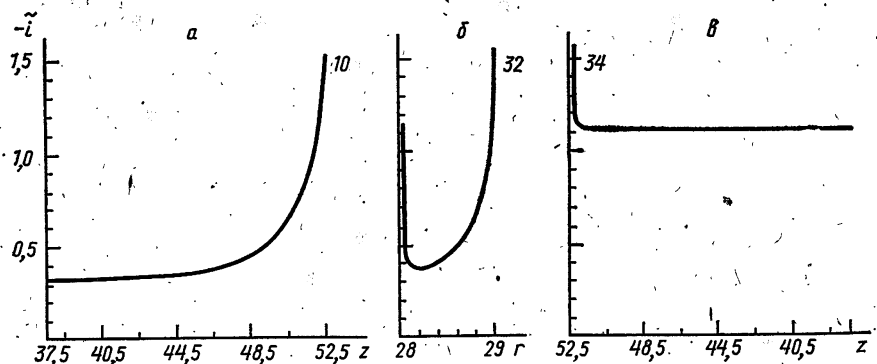


Рис. 5. Плотность поверхностного тока по контурам: а —  $r=28$ ; б —  $z=52$ ; в —  $r=29$

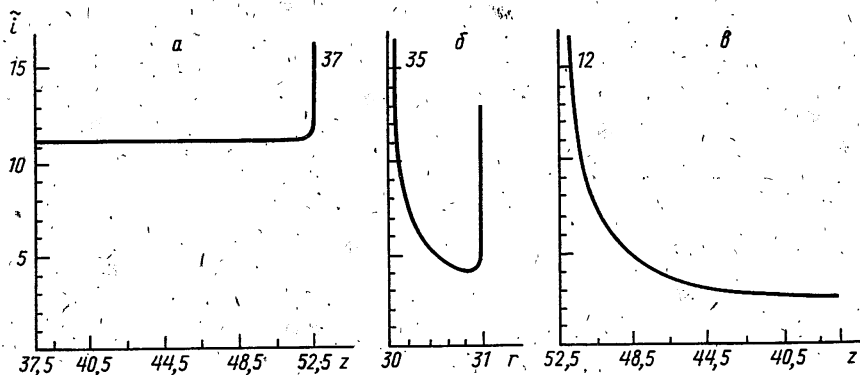


Рис. 6. Плотность поверхностного тока по контурам: а —  $r=30$ ; б —  $z=52,5$ ; в —  $r=31$

Приведем характеристики алгоритма, основанного на интегральных уравнениях. Для задач с бесконечно тонкими электродами  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и с кожухом  $\Gamma_3$  общее время счета для вычисления индуктивных коэффициентов без определения полной картины магнитного поля было примерно в 1,5—2 раза меньше, чем для разностного метода. При этом на каждой кривой  $\Gamma_i$  размещалось по 100 расчетных точек. Внешняя память не использовалась. Отметим, что применение неравномерных сеток может повысить эффективность алгоритма.

Была проведена большая серия расчетов обоими методами в области с одним контуром (см. рис. 1, б) радиуса  $R_1=30$  см. Толщина контура бралась нулевой. Расчеты проводились с целью выяснения характера изменения величин индуктивных коэффициентов при изменении размеров электродов. Результаты расчетов:



Таблица 2

$h$ $h_1$	15	30	60	120	$R_3$
5	500	378	272	179	90
10	622	455	313	195	90
22,5	749	535	351	209	90
45	799	566	365	216	90
5	499	373	263	166	60
10	617	448	297	178	60
22,5	731	511	324	187	60
45	759	526	330	189	60
5	433	284	172	97	37,5
10	484	305	179	97	37,5
22,5	505	315	181	98	37,5
45	506	316	181	98	37,5

интегральным методом представлены в табл. 2. Обозначения в ней совпадают с обозначениями на рис. 1, б. На расчет одного варианта из табл. 2 тратилось время ЭВМ порядка 30 с. Разностным методом такой же вариант на сетке  $54 \times 62$  рассчитывался за время около 1 мин. Результаты расчетов разностным методом при толщине  $\delta\Gamma_1 = 0,01$  см совпадали с результатами табл. 2 в пределах 2%. Увеличение толщины контура  $\Gamma_1$  до 1 см приводило к уменьшению индуктивного коэффициента на 4—5%. Исследовалась зависимость индуктивного коэффициента контура  $\Gamma_1$  от радиуса скругления его углов. Например, для варианта  $h_1 = 22,5$ ,  $h = 30$ ,  $R_3 = 60$  (табл. 2) при  $\delta\Gamma_1 = 1$  см и  $R_0 = 0,007$  см значение  $L$  было равно 488, а при  $R_0 = 0,07$  —  $L = 493$ . Дальнейшее увеличение  $R_0$ , на наш взгляд, изменяет геометрию контура и, таким образом, не может быть отнесено к изменению радиуса скругляющей окружности.

Увеличение  $R_1$  на 1 см при прочих равных параметрах увеличивает  $L$  примерно на 5%.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шнеерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов и импульсных устройствах большой мощности. — Л.: Энергоиздат, 1982.
2. Дашук П. Н., Зайенц С. Л. и др. Техника больших импульсных токов и магнитных полей. — М.: Атомиздат, 1970.
3. Булан В. В., Головин Г. Т. Об одном подходе к численному определению магнитных полей и индуктивных коэффициентов. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1985, т. 25, № 6, с. 805—812.
4. Хапаев М. М. О численном обращении интегральных операторов I рода типа потенциала простого слоя. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 3, с. 498—505.
5. Хапаев М. М. О некоторых методах регуляризации и численного решения интегральных уравнений I рода. — Изв. вузов. Математика, 1983, № 7, с. 81—85.
6. Хапаев М. М. Численное решение одномерных интегральных уравнений скин-эффекта и теории потенциала. Дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1983.
7. Головин Г. Т. Расчет электрического поля в промежутке острие—плоскость. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 23. Изд-во МГУ, 1974, с. 151—159.
8. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. — М.: Наука, 1982.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ АДАПТИВНОЙ ОПТИКИ

1°. **Введение.** В последние годы интенсивно развивается новое направление нелинейной оптики — нелинейная адаптивная оптика, включающая в себя компенсацию нелинейных искажений светового пучка, достижение предельных коэффициентов преобразования в умножителях частоты и формирование оптимальных распределений волнового фронта пучка. Данное обстоятельство связано с важными практическими приложениями ее результатов для задач транспортировки световой энергии, оптической локации и связи, так как оптическое излучение, распространяющееся в нелинейной среде, может претерпеть значительные амплитудно-фазовые искажения. Для их уменьшения (компенсации) используют методы нелинейной адаптивной оптики.

К настоящему времени наиболее детально изучена работа адаптивных систем управления фокусировкой и наклоном волнового фронта [1—5]. Однако с увеличением начальной мощности пучка для эффективной компенсации его самовоздействия следует подключать управление абберационными членами волнового фронта. Опыт работ [1—5] показал, что на первом этапе исследования наиболее целесообразно использовать приближенные математические модели этих систем, а полученные на их основе результаты сравнивать и уточнять с результатами численных экспериментов.

В настоящей статье кратко излагаются результаты анализа работы адаптивных систем, способных обрабатывать абберационное распределение волнового фронта (т. е. обладающих  $M$  степенями свободы), и предложенные нами подходы для их расчета.

2°. **Постановка задачи и основные уравнения.** Как известно [9], распространение оптического излучения в нелинейной и линейной средах описывается квазиоптическим уравнением, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A + i\alpha \varepsilon'_{\text{нл}} (|A|^2) A + \delta \varepsilon''_{\text{нл}} (|A|^2) A = 0 \quad (1)$$

с граничным условием

$$A(x, y, 0) = f(x, y) \exp[-iS_0(x, y)], \quad (2)$$

где  $A$  — комплексная амплитуда, нормированная на ее пиковое значение  $A_0$ ;  $z$  — продольная координата, измеряемая в дифракционных длинах  $l_d = 2ka^2$ ;  $k$  — волновое число;  $a$  — радиус пучка;  $\Delta_{\perp}$  — поперечный оператор Лапласа;  $\alpha$  — отношение начальной мощности пучка  $P_0$  к мощности самовоздействия  $P_{\text{св}}$ ;  $\varepsilon'_{\text{нл}}$ ,  $\varepsilon''_{\text{нл}}$  — нелинейные добавки к действительной и мнимой частям

диэлектрической проницаемости;  $S$  характеризует нелинейное поглощение;  $x, y$  — поперечные координаты, нормированные на  $a$ ;  $f(x, y)$  и  $S_0(x, y)$  — начальные распределения амплитудного профиля и волнового фронта пучка.

Изменяя

$$S_0(x, y) = \sum_{p, q}^{M \geq p+q} \theta_{pq} \Phi_{pq}(x, y), \quad (3)$$

можно в сечении  $L=z$  повышать принимаемую в апертуру радиуса  $R$  мощность  $J_p$  (или пиковую интенсивность  $J_l$ ), уменьшать ширину пучка  $J_a$  или смещение его центра тяжести  $J_c$ . Здесь  $\theta_{pq}$  — оптимизируемые коэффициенты;  $\Phi_{pq}$  — некоторые выбранные функции;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — поперечная координата. Выбор  $\Phi_{pq}$  зависит от вида нелинейности и от начального распределения амплитуды. Так, в оптически прозрачной среде с тепловым механизмом нелинейности

$$\epsilon'_{\text{нл}} = T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = |A|^2 \quad (4)$$

в качестве  $\Phi_{pq}$  удобно выбрать полиномы Цернике;  $T$  — изменение температуры среды за счет ее нагрева оптическим излучением;  $t$  — время, нормированное на время движения среды поперек пучка  $a/V$ .

При распространении импульсного излучения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta_{\perp} T + |A|^2 \quad (5)$$

$\Phi_{pq}$  задаются в виде полиномов Эрмита;  $t$  — время, нормированное на  $a^2/\chi$ ;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности;  $V$  — скорость движения среды. Для кубичной нелинейности  $\epsilon'_{\text{нл}} = |A|^2$  базовыми функциями являются полиномы Лагерра.

Следует подчеркнуть важную особенность аберрационных зеркал: одно и то же значение концентрации мощности на мишени может быть достигнуто для разных значений коэффициентов  $\theta_{pq}$ . Поэтому конечный результат оптимизации зависит от их начального значения. Следовательно, для выделения глобального экстремума нужно поставить дополнительные условия на распределение волнового фронта.

3°. Компенсация нелинейных искажений в тонком слое. При прохождении оптическим излучением тонкого нелинейного слоя он приобретает дополнительную расходимость  $S_{\text{нл}}$ . В этом случае минимальная ширина пучка в сечении  $l$  за слоем нелинейной среды достигается при следующем распределении волнового фронта:

$$S(x, y) = \frac{ka^2}{2l} (x^2 + y^2) - S_{\text{нл}}(x, y, l). \quad (6)$$

Следовательно, нужно подобрать коэффициенты  $\theta_{pq}$  в (3) так, чтобы реализовать распределение (6).

Используя формальную аналогию между уравнением квазиоптики (1) и уравнением Шредингера для свободной частицы в двумерном случае, можно получить [6; 7] следующие соотношения:

$$X(\bar{z}) = \frac{\bar{z}}{2Q^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f^2 dx dy, \quad a^2(\bar{z}) = 1 + \frac{\bar{z}}{4Q^2 \langle r^2 \rangle_0} \times \\ \times \int_0^{\infty} (f_r)^2 r dr + \frac{\bar{z}}{2Q^2 \langle r^2 \rangle_0} \int_0^{\infty} f^2 \left( 2r \tilde{S}_r + \frac{\bar{z}}{2} (\tilde{S}_r)^2 \right) r dr, \quad (7)$$

где  $\bar{z} = 2l/ka^2$ ;  $\tilde{S} = S_{\text{пл}} + S_0 + ka^2(x^2 + y^2)/2$ ; среднее значение  $\langle G \rangle$  оператора  $G$  — понимается в смысле

$$\langle \hat{G} \rangle_{\bar{z}} = \iint_{-\infty}^{\infty} A^* (\hat{G}A) dx dy / Q^2, \quad \langle r^2 \rangle_{\bar{z}} = \frac{2\pi}{Q^2} \int_0^{\infty} A^* (\hat{G}A) r dr. \quad (8)$$

Здесь  $Q$  — норма начального распределения  $f(x, y)$ ;  $A(x, y)$  — решение линейного уравнения. Причем  $\langle G \rangle_0$  берется по комплексной амплитуде оптического излучения, прошедшего слой нелинейной среды.

В случае распространения аксиально-симметричного гауссова  $f_{\Gamma}(r) = \exp(-r^2)$  или трубчатого  $f_{\text{ТР}}(r) = \sqrt{2} r^2 \exp(-r^2)$  пучков, разлагая  $\tilde{S}$  по полиномам Лагерра  $L_p(2r^2)$ , получим следующее выражение для ширины пучка:

$$a^2(\bar{z}) = \begin{cases} 1 + \bar{z}^2 + 4\bar{z} \left( -b_1 + \bar{z} \sum_{p \geq 1} b_p^2 p \right), & f_{\Gamma}(r), \\ 3 + 4\bar{z}^2 + 2\bar{z} \left( -6b_1 + \bar{z} \sum_{p \geq 1} b_p^2 p(p+1)(p+2) \right), & f_{\text{ТР}}(r). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $b_p$  — коэффициенты разложения. Подставляя в (9)  $b_p = c_p + \theta_p$ , где  $c_p$  — коэффициенты разложения  $S_{\text{пл}}$ , получим, что минимальная ширина на мишени достигается при

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\bar{z}} - C_1, \quad \theta_p = -c_p, \quad p \geq 2. \quad (10)$$

Заметим, что волновой фронт разлагается по степеням  $2r^2$  и поэтому в выражении для  $\theta_1$  в знаменателе присутствует коэффициент 2. В случае компенсаций  $M$  первых aberrаций

$$a^2(\bar{z}) = \bar{z}^2 \begin{cases} 1 + 4 \sum_{p=M+1}^{\infty} p c_p^2, & f_{\Gamma}(r), \\ 2 + \sum_{p=M+1}^{\infty} c_p^2 p(p+1)(p+2), & f_{\text{ТР}}(r). \end{cases} \quad (11)$$

При отсутствии аксиальной симметрии удобно использовать разложение по полиномам Эрмита. Тогда ширина пучка определяется через коэффициенты разложения следующим образом:

$$a^2(\bar{z}) = 1 + \bar{z}^2 + 2\bar{z} \left( 4b_{02} + 4b_{20} + \bar{z} \sum_{p+q>1}^{\infty} b_{pq}^2 2^{p+q} p! q! (p+q) \right), f_{\Gamma}(r). \quad (12)$$

Таким образом, оптимальные условия распространения реализуются при

$$\theta_{20} = -\frac{1}{8z} - c_{20}, \quad \theta_{02} = -\frac{1}{8z'} - c_{02}, \quad \theta_{pq} = -c_{pq}, \quad (13)$$

а размер пучка при компенсации  $M$  первых aberrаций равен

$$a^2(\bar{z}) = \bar{z}^2 \left( 1 + 2 \sum_{p+q>M}^{\infty} c_{pq}^2 2^{p+q} (p+q) p! q! \right). \quad (14)$$

А. Керровский слой. Проходя тонкий слой дефокусирующей среды, оптическое излучение приобретает дополнительный набег фазы  $S_{\text{нл}} = -2\theta_{\text{нл}} f^2$ , где  $\theta_{\text{нл}}$  — дополнительная расходимость. В этом случае ширина пучка на мишени с плоским фазовым фронтом при  $\bar{z}=0$  увеличивается с ростом  $\theta_{\text{нл}}$  по закону

$$a^2(\bar{z}) = \begin{cases} 1 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}\theta_{\text{нл}} + 16\theta_{\text{нл}}^2 \bar{z}^2/9, & f_{\Gamma}, \\ 3/2 + 4\bar{z}^2 + 3z\bar{\theta}_{\text{нл}}/4 + 160\theta_{\text{нл}} \bar{z}^2/3^6, & f_{\Gamma\text{р}}. \end{cases} \quad (15)$$

Для компенсации aberrаций порядка  $M$  необходимо, чтобы адаптивная система отработала следующие значения коэффициентов:

$$\theta_1 = \frac{1}{2z} + \frac{\theta_{\text{нл}}}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad f_{\Gamma}, \\ 1/8, \quad f_{\Gamma\text{р}} \end{array} \right. ;$$

$$\theta_p = \theta_{\text{нл}} 2^{-p} \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad f_{\Gamma}, \\ 2^{-5} (p^2 - 9p + 12), \quad f_{\Gamma\text{р}}. \end{array} \right. \quad (16)$$

Тогда ширина пучка уменьшится до значения

$$a^2(\bar{z}) = \begin{cases} 1 + \frac{16}{9 \cdot 4^M} \theta_{\text{нл}}^2 (3M/4 + 1), & f_{\Gamma}, \\ 2 + 8\theta_{\text{нл}}^2 \left[ \frac{10}{3^6} - \frac{1}{2^{12}} \sum_{p=1}^M p(p+1)(p+2)(p^2 - 9p + 12)^2 \right] \frac{1}{2^{2p}}, & f_{\Gamma\text{р}}. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что в случае полной компенсации aberrаций  $a^2(\bar{z})$  уменьшается по сравнению со значением, достигаемым при пло-

ском фазовом фронте в следующее число раз:

$$\eta = 1 + \begin{cases} 16\theta_{\text{нл}}^2/9_{\text{нл}} + 2\theta/\bar{z} + 1/\bar{z}^2, & f_{\text{Г}}, \\ 40\theta_{\text{нл}}^2/3^6 + 3\theta_{\text{нл}}/(16\bar{z}) + 3/(4\bar{z}^2), & f_{\text{Тр}}. \end{cases} \quad (18)$$

Подчеркнем, что более целесообразно использовать трубчатые пучки, если система может обрабатывать только 1—2 моды.

Б. Компенсация теплового самовоздействия импульса в неподвижной среде. В случае распространения гауссова светового пучка его ширина на мишени изменяется со временем  $\tau = \chi t/a^2$  по закону

$$S_{\text{нл}} = \theta_{\text{нл}} \int_0^{8\tau} d\eta \frac{\exp(-2r^2/(\eta+1))}{\eta+1} \times \\ \times \begin{cases} 2, & f_{\text{Г}}, \\ (\eta+1)^{-3} 4^{-1} \left( \eta^2 + \frac{4\eta r}{\eta+1} + \frac{2r^4}{(\eta+1)^2} \right), & f_{\text{Тр}}. \end{cases}$$

Следовательно, с ростом времени в среде устанавливается стационарное распределение температурного профиля.

Разлагая  $S_{\text{нл}}$  по полиномам Лагерра, определим законы изменения оптимальных значений коэффициентов при динамической компенсации теплового самовоздействия

$$\theta_1 = \frac{\tau\theta_{\text{нл}}}{2\eta} + \frac{1}{2z}, \quad \theta_p = \frac{\theta_{\text{нл}}}{4p} (1 - \eta^{-p})/2^p, \quad f_{\text{Г}}, \\ \theta_p = \frac{\delta_{1p}}{2z} + \frac{\theta_{\text{нл}}}{8} \left( \frac{1 - \eta^{-p}}{p2^{p-1}} - \frac{p+2}{(p+1)2^{p-1}} (1 - \eta^{-p-1}) \right) + \\ + \frac{p^2 + 11p + 2}{(p+2)2^{p+2}} (1 - \eta)^{-p-2} - \frac{2(p^2 + 7p + 12)}{(p+3)^{p+3}} (1 - \eta^{-p-3}) + \\ + \frac{p^2 + 7p + 2}{(p+4)2^{p+4}} (1 - \eta^{-4-p}), \quad f_{\text{Тр}}, \quad (19)$$

где  $\eta = 4\tau + 1$ . Из (19) следует, что при оптимизации только  $\theta_1$  для  $\tau \sim 1$ , когда увеличивается действие тепловой линзы, необходимо сильнее фокусировать пучок. Если длительность импульса превышает время теплораспространения, то оптимальное значение фокусировки сначала увеличивается, а затем выходит на постоянную величину. Отметим, что на начальной стадии распространения импульса нет необходимости подключать к управлению aberrации.

В. Тепловая дефокусировка в движущейся среде. В этом случае нелинейный набег фазы определяется из решения уравнения (4). При этом положение центра тяжести  $X(\bar{z})$  первоначально гауссова пучка, и его радиусы по осям  $x, y$  определяются выражением

$$X(\bar{z}) = -\bar{z}\theta_{\text{нл}}(1 - \exp(-\tau^2)),$$

$$a_x^2(\bar{z}) = 1 + \bar{z}^2 + 2\bar{z} \left( \theta_{\text{нл}} \tau \cdot \exp(-\tau^2) + \frac{2}{3} \bar{z} \theta_{\text{нл}}^2 \right) (1 - \exp(-4\tau^2/3)) - X^2,$$

$$a_y^2(\bar{z}) = 1 + \bar{z}^2 + 2\bar{z} \theta_{\text{нл}} F(\tau) + \frac{32}{3\sqrt{3}} \bar{z}^2 \theta_{\text{нл}} \int_0^\tau F\left(\frac{\eta}{\sqrt{3}}\right) \exp(-\eta^2) d\eta, \quad (20)$$

где  $F$  — функция ошибок. Из анализа (20) следует, что размер пучка вдоль ветра сначала увеличивается, а затем уменьшается и выходит на стационарное значение. Разлагая нелинейный набег фазы по полиномам Эрмита, находим оптимальные коэффициенты:

$$\theta_{20} = -\frac{1}{8\bar{z}} - \theta_{\text{нл}} \tau \cdot \exp(-\tau^2) \frac{1}{8},$$

$$\theta_{02} = -\frac{1}{8\bar{z}} - \theta_{\text{нл}} F(\tau) \frac{1}{8},$$

(21)

$$\theta_{pq} = -\theta_{\text{нл}} H_q(0) 2^{-\frac{3}{2}(p+q)} [H_{p-1}(0) - e^{-\tau^2} H_{p-1}(\tau)] \frac{1}{p!q!},$$

$$\theta_q = -\theta_{\text{нл}} 2^{-\frac{3}{2}q} F(\tau) H_q(0)/q!$$

Подчеркнем, что для компенсации бокового смещения светового пучка, прошедшего тонкий слой движущейся со скоростью  $V$  среды, достаточно управлять только наклоном его волнового фронта.

Анализ компенсации нелинейных искажений трубчатого пучка более сложный. Так, например,  $S_{\text{нл}}$  в данном случае определяется следующим образом:

$$S_{\text{нл}} = \theta_{\text{нл}} \left\{ -\frac{3}{4} x(2x^2 + 1) \exp(-2x^2) - \exp(-2(x-V\tau)^2) \times \right. \quad (22)$$

$$\left. \times (x-V\tau)(2(x-V\tau)^2 + 1) - \frac{3}{2} [F(x) - F(x-V\tau)] \right\} y^4 \exp(-2y^2).$$

Однако, разлагая экспоненциальные множители и функцию ошибок в ряд по степеням  $x^p y^q$ , можно определить зависимость коэффициентов от времени. Ввиду громоздкости выражений они здесь не приводятся.

4°. Компенсация нелинейных искажений в толстом нелинейном слое. К настоящему времени по существу не разработаны подходы, позволяющие аналитически записать зависимость выбранного критерия качества в толще нелинейной среды от начального распределения волнового фронта. Поэтому данный анализ выполняется с помощью ЭВМ. В [10] была исследована трехэлементная система апертурного зондирования: три оптимизирующих параметра. В [6] получена зависимость  $a^2(\bar{z})$  от числа абберационных

мод, в качестве которых выбирались функции  $\Phi_p(r) = r^{p+1}$ ,  $p \geq 1$ .  
 Оптимизация коэффициентов  $\theta_p$  осуществлялась статистическим методом [11, 12], а затем полученные значения уточнялись градиентными методами. В качестве примера на рис. 1 представлены результаты численных экспериментов, проведенных для гауссова (рис. 1, а, в) и трубчатого (рис. 1, б, г) пучков при рас-

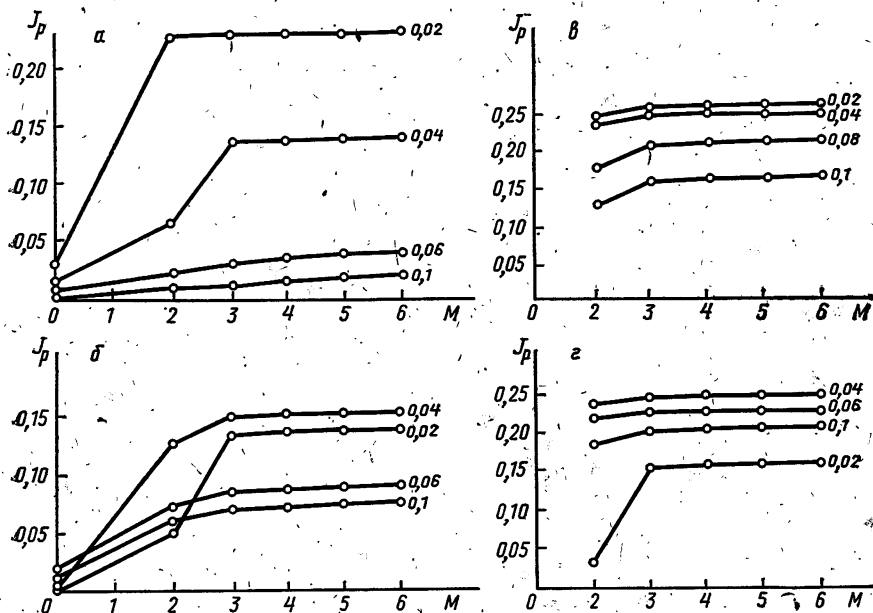


Рис. 1. Зависимость принимаемой мощности  $J_p$  пучка от числа компенсируемых aberrаций  $M$  при его распространении в кервской (а, б) и тепловой (в, г) дефокусирующей среде. Трасса распространения указана на рисунке

пространении оптического излучения в средах с кубической нелинейностью (рис. 1, а, б) и стационарной тепловой дефокусировкой (рис. 1, в, г) для  $\alpha=400$ . Расстояние до мишени указано,  $R=0,34$ : При расчетах использовались консервативные разностные схемы. Как следует из рисунков, число требуемых aberrаций для заданного значения  $\alpha$  определяется  $L$  и начальным распределением амплитуды. Так, при распространении гауссова пучка в кубической среде на трассе  $L=0 \div 0,02$  достаточно использовать зеркало, способное обрабатывать только фокусировку пучка. Если  $L=0,04$ , то необходимо использовать первую aberrационную моду. При дальнейшем увеличении расстояния  $L=0,06 \div 0,1$  эффективная компенсация имеет место при использовании зеркал, способных обрабатывать четыре низшие aberrационные моды.

Аналогичные зависимости имеют место при распространении трубчатого пучка. Однако если для трасс  $L \leq 0,04$  профилирова-



ние оптического излучения приводит к незначительному увеличению  $J_p$  ( $L=0,04$ ) либо уменьшению  $J_p$ , то для  $L=0,06$  и  $L=0,1$  имеет место соответственно двух- и трехкратное увеличение  $J_p$  по сравнению со значением, достигаемым при распространении первоначально гауссова пучка. Данное обстоятельство связано с тем, что в процессе распространения трубчатый пучок трансформируется в гауссов с пиковой интенсивностью, примерно равной начальной, а затем расплывается.

В случае тепловой дефокусировки гауссова пучка (рис. 1, в) для малых трасс распространения достаточно высокая эффективность компенсации может быть достигнута фокусировкой оптического излучения ( $L \leq 0,04$ ), а при увеличении расстояния до мишени  $L > 0,06$  целесообразно использовать гибкое зеркало, способное отрабатывать низшую абберационную моду. Профилирование пучка приводит к увеличению концентрации мощности на мишени, расположенной на расстоянии  $L \sim 0,1$ , почти в 1,5 раза.

При компенсации тепловой дефокусировки в движущейся среде в качестве базисных функций использовались круговые полиномы Цернике [13]  $R_p^q(r)$ . В этом случае волновой фронт записывается в виде

$$S_0(x, y) = \theta_{00} + \sum_{p=1}^3 \theta_{30} R_{2p}^0(r) + \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^p \theta_{pq} R_p^q(r) \cos(p\psi), \quad (23)$$

причем оптимизация  $\theta_{pq}$  проводилась статистическим методом. Для выяснения влияния высших аббераций в разложении (23) оптимизировались 7, 8, 9, 10 коэффициентов для  $\alpha=40$ . Отметим, что для  $L \sim 0,02$  подключение аббераций приводит к существенному увеличению принимаемой мощности. Так, при  $R=0,14$  значение  $J_p$  при  $M=10$  увеличивается в 2,6 раза по сравнению со значением для  $M=7$ , а при  $R=1,38$  — в 1,3 раза. При увеличении расстояния до мишени выигрыш в эффективности оптимизации уменьшается. Например, при  $R=0,138$  принимаемая мощность при  $M=10$  больше в 1,2 раза соответствующего значения при  $M=7$ .

При увеличении расстояния до мишени  $L=0,06 \div 0,08$  для рассматриваемых апертур радиусом  $0,138 \leq R \leq 1,38$  максимальная концентрация мощности достигается при  $M=8$  (отношение значений  $J_p$  при  $M=8$  и  $M=7$  составляет примерно  $1,05 \div 1,06$ ). Для  $L=0,1$  максимальная эффективность реализуется при  $M=7$ .

В качестве иллюстрации в табл. 1 представлены результаты оптимизации коэффициентов  $\theta_{pq}$  для  $R=0,7; 0,14$ .

Распространение оптического излучения в жидкокапельной среде описывается системой уравнений [14]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\Delta_{\perp}A + \delta WA - i\alpha TA = 0, \quad \Delta_{\perp}T = -W|A|^2, \quad \Delta_{\perp}W = -\gamma W|A|^2, \quad (24)$$

Таблица 1

Зависимость принимаемой мощности в апертуру  
от числа абберационных мод  $M$

$R = 0,7$

7	8	9	10	$10^3$	$L$
6,33	6,87	7,52	9,06	$J_p$	0,02
9	11,6	12	12	$J_p$	0,04
10,6	14	14,1	14,5	$J_p$	0,06
11,2	11,7	11,9	11,9	$J_p$	0,08

$R = 0,14$

7	8	9	10	$10^3$	$L$
3,13	3,66	4,88	8,86	$J_p$	0,02
7,37	8,44	9,22	11	$J_p$	0,04
7,62	13,3	13,4	13,5	$J_p$	0,06
6,2	6,6	6,78	6,9	$J_p$	0,08

в которых  $\varepsilon''_{\text{нл}} = W$ ;  $\delta = l_d/l_r$ ;  $l_r$  — длина затухания в невозмущенной среде;  $\gamma$  — отношение  $P_0$  к мощности  $P_w$ , характеризующей затраты поглощенной энергии на испарение капель. Следует отметить, что оптимизация параметров пучка может проводиться как для достижения максимальной прозрачности среды, так и для минимальных искажений оптического излучения. В данном пункте нас будет интересовать последний случай. Подчеркнем, что  $z$  нормировалась на  $l_r$ , а волновой фронт задавался в виде

$S_0(r) = \sum_{p=1}^M \theta_p r^{p+1} / D^p$ . При этом при оптимизации только волно-

вого фронта коэффициент  $D$  равен 1.

Результаты численных экспериментов для  $L=0,1$ ,  $\delta=30$ ,  $\gamma=5$ ,  $\alpha=100$  показали, что для достижения максимальной концентрации мощности в апертуру  $R=0,53$  можно ограничиться зеркалами, способными обрабатывать низшие абберационные моды  $M=2 \div 3$ . На рис. 2, а представлены сплошными линиями зависи-

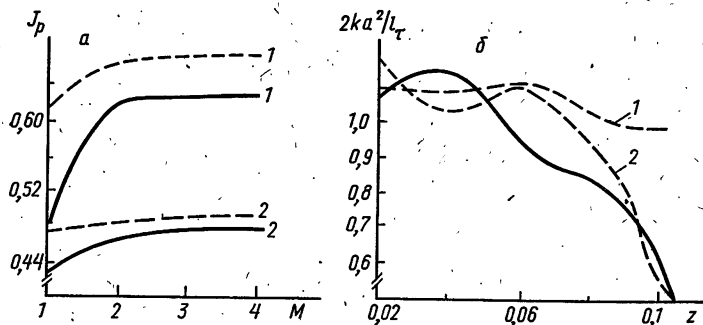


Рис. 2. Зависимости: *a* — принимаемой мощности  $J_p$  пучка от числа компенсируемых aberrаций  $M$  при его распространении в облачной среде; *б* — оптимальной ширины пучка от  $z$ -трассы распространения

мости доли принимаемой мощности на мишени, расположенной в сечении  $L=0,02$  (кривые 1),  $L=0,06$  (кривые 2).

Для более протяженных трасс  $L>0,06$  «включение» aberrационных членов в начальное распределение волнового фронта не приводит к существенному увеличению концентрации мощности. Оптимизация ширины пучка позволяет для трасс  $L\leq 0,04$  повысить в 1,1÷1,5 раза концентрацию мощности. На рис. 2, *a* штриховыми линиями нанесены соответствующие значения мощности, достигаемые при одновременной оптимизации волнового фронта и ширины пучка. Отметим, что с ростом  $L$  более выгодно использовать широкие пучки. Данный вывод следует из рис. 2, *б*, на котором представлены зависимости оптимальной ширины пучка от расстояния до мишени при  $M=2$  (сплошная кривая),  $M=3$  (штриховая кривая) для  $\delta=30$  (кривые 1) и для  $\delta=10$  (кривые 2). Отметим, что при уменьшении оптической толщины облака зависимость  $J_p$  от числа степеней свободы в случае оптимизации ширины пучка и его волнового фронта становится более сильной.

**5°. Компенсация случайных флуктуаций волнового фронта.** Известно, что моделирование на ЭВМ распространения оптического излучения через турбулентную среду связано с большими затратами машинного времени. Между тем важность таких исследований для практики несомненна. Изложенный в п. 2° подход позволяет рассчитать нелинейные искажения частично-когерентного оптического излучения, например прошедшего слой турбулентной атмосферы и получившего флуктуирующую составляющую волнового фронта  $S_\Phi$  (в правой части (6) необходимо добавить —  $S_\Phi$ ). Считая, что  $S_\Phi$  имеет нулевое среднее  $\bar{S}_\Phi=0$ , а для корреляционной функции справедлив нормальный закон с дисперсией  $\sigma$  и радиусами корреляций  $r_x, r_y$  соответственно по осям  $x, y$ , в последнем интеграле выражений (7) для ширины пучка

$\langle x \rangle_z^2$  получим новый член  $\frac{\bar{z}}{2} \left( \frac{\partial S_\Phi}{\partial x} \right)^2$ . Если радиусы корреляций равны  $\rho_k$ , то в (9) для ширины пучка необходимо  $\bar{z}^2$  заменить на  $\bar{z}^2(1+2a^2/\rho_k^2)$ . Следовательно, если не компенсировать мелко-масштабную неоднородность фазы, то в плоскости мишени происходит уширение пучка, которое определяется отношением его начального радиуса к радиусу корреляции  $\rho_k$  фазы. При этом дисперсия  $\sigma_a^2$  флуктуаций ширины пучка равна

$$\sigma_a^2 = \bar{z}^2 \frac{(\rho_k^2/a^2 + 2)}{(\rho_k^2/a^2 + 1)^2}$$

Более подробный анализ показывает также, что среднее положение центра тяжести пучка и отклонение его от положения мишени не зависят от  $S_\Phi$ , при этом мгновенное значение  $\langle x \rangle_z$  испытывает случайные флуктуации, а оптимальные значения коэффициентов  $\theta_{pq}$  определяются только регулярной составляющей.

Рассмотрим случай, когда адаптивная система способна отслеживать случайные флуктуации волнового фронта. Очевидно, что на практике наиболее просто осуществляется управление линейными и квадратичными членами по пространственным координатам. Тогда оптимальные значения коэффициентов управления равны

$$\theta_1^{\text{опт}} = -\varphi_1(S_p + S_\Phi) + 2x_1/\bar{z}, \quad (25)$$

$$\theta_{20}^{\text{опт}} = -1/\bar{z} - \varphi_{20}(S_p + S_\Phi), \quad \theta_{11} = -\varphi_{11}(S_p + S_\Phi),$$

где

$$\varphi_1(S) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^2 S_x dx dy / Q^2,$$

$$\varphi_{20}(S) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^2 S_x x dx dy / (2Q^2 \langle x^2 \rangle_0),$$

$$\varphi_{11}(S) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^2 (S_x y + S_y x) dx dy / (Q^2 (\langle x^2 \rangle_0 + \langle y^2 \rangle_0)). \quad (26)$$

$x_1$  — координата мишени;  $\theta_2^{\text{опт}}$ ,  $\theta_{02}^{\text{опт}}$  записываются аналогично  $\theta_1^{\text{опт}}$ ,  $\theta_{20}^{\text{опт}}$ .

6°. Численное моделирование реальных гибких зеркал. Для практики большое значение имеет проблема формирования требуемого распределения волнового фронта реальными гибкими зеркалами. Заданный профиль зеркала создается, например, за счет приложения через приводы возмущений в фиксированных точках

$$S_{\text{упр}} = \sum_{p=1}^{N_0} \theta_p \exp \left\{ - (x - x_p)^2 / a_0^2 - (y - y_p)^2 / a_0^2 \right\}. \quad (27)$$

Здесь  $x_p, y_p$  — координаты приводов;  $a_0$  — нормированный на  $a$  радиус действия возмущения отдельного привода;  $\theta_p$  — значение возмущения.

Следует подчеркнуть, что на качество компенсации нелинейных искажений существенное влияние оказывают геометрия адаптивного зеркала, его функция отклика, значение  $a_0$ , расположение приводов и их количество [8]. С ростом числа приводов увеличивается точность реализации требуемого  $S$ , но уменьшается быстродействие адаптивной системы. Поэтому необходимо ограничиваться минимальным числом приводов, расположив их специальным образом.

Для исследования данной проблемы воспользуемся представлением распределения оптического излучения  $A(t, x, y, \bar{z})$  в виде [13]:

$$A = \frac{1}{z} \iint f(t, \xi, \eta) \exp \left\{ i \tilde{S}(\xi, \eta) - \frac{i}{z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (28)$$

где  $\tilde{S}$ , как и выше, представляет собой сумму  $S_{\text{упр}}$  и  $S_{\text{нл}}$ . Отметим, что (28) содержит «линейные» аберрации [13], которые, вообще говоря, необходимо компенсировать. Однако ниже рассмотрим задачу формирования волнового фронта  $S_{\text{упр}}$  для компенсации расходимости пучка, прошедшего тонкий слой нелинейной среды, причем ее качество будем оценивать по значению функционала [15]:

$$J = \iint |S_{\text{нл}}(x, y) - S_{\text{упр}}(x, y)|^2 f^2(x, y) dx dy, \quad (29)$$

который нетрудно получить из (28), используя разложение в ряд экспоненты.

Из проведенных численных экспериментов следует, что качество компенсации кервовой и тепловой дефокусировок в неподвижной среде существенно зависит от значения  $a_0$ . В качестве иллюстрации на рис. 3 представлены зависимости  $J$  от числа приводов  $N$  в первом квадранте (общее число  $N_0 = 4N$ ) при оптимизации их расположения и  $\theta_p$  в (27). Сплошные кривые соответствуют гауссову пучку, пунктирные кривые — трубчатому. Значение  $a_0$  указано на рисунке. Хорошо видно, что с уменьшением  $a_0$  отличие профиля от требуемого распределения  $S_{\text{нл}}$  быстро возрастает как для гауссова, так и для трубчатого пучков. Если  $a_0 \leq 0,2$ , то для повышения концентрации мощности пучка желательно использовать трубчатые пучки. Проведенный анализ показывает [8], что для достижения  $J$  с требуемой точностью в случае распространения гауссова и трубчатого пучков необходимо соответственно использовать следующее число приводов:

$$N_0 \geq \exp \left[ \frac{6(x_m^2 + y_m^2)}{(2a_0^2 + 1)(a_0^2 + 2)} \right] \frac{1}{a_0^2} \begin{cases} \left( \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{\pi} \theta_{\text{нл}}^2 \right) \frac{(2a_0^2 + 1)^2}{(a_0^2 + 1)}, f_{\text{г}}, \\ \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\pi^2} \theta_{\text{нл}} \right) \frac{(a_0^2 + 1)^4}{(a_0^2 + 2)^3}, f_{\text{тр}}, \end{cases} \quad (30)$$

где  $x_m, y_m$  — максимальные координаты зеркала. Причем если отношение радиуса действия возмущения отдельного привода значительно меньше  $a$ , то выгодно вместо одного привода в центре

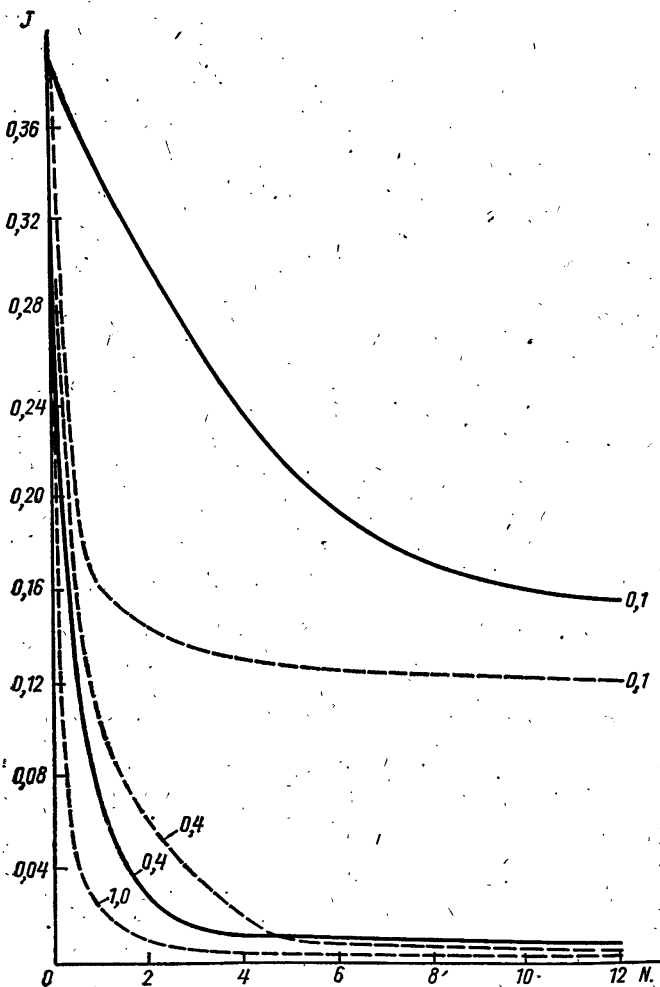


Рис. 3. Зависимость критерия  $J$  от числа  $N$  используемых приводов. Отношение радиуса действия привода к радиусу пучка приведено на рисунке

зеркала расположить симметрично четыре привода. В качестве примера в табл. 2 представлены координаты приводов, расположенных в первом квадранте, и значения коэффициентов  $\theta_p$  для  $a_0 = 0,1$  и  $\theta_{пл} = 1,0$  при распространении гауссова пучка.

Таблица 2

Оптимальное расположение приводов, значений возмущений и критерия качества

N	$x_1$ $y_1$ $\theta_1$	$x_2$ $y_2$ $\theta_2$	$x_3$ $y_3$ $\theta_3$	$x_4$ $y_4$ $\theta_4$	$x_5$ $y_5$ $\theta_5$	$x_6$ $y_6$ $\theta_6$	$x_7$ $y_7$ $\theta_7$	J
1	0,1673 0,1673 1,81							0,3395
2	0,1675 0,1675 0,8	1,7797 1,6703 0,07						0,3194
3	0,1329 0,1321 1,74	0,4031 0,1681 1,52	0,1681 0,4022 1,56					0,2634
4	0,1328 0,1327 1,73	0,4017 0,1316 1,54	0,1317 0,4016 1,54	0,4008 0,4005 1,41				0,2361
5	0,1328 0,1326 1,72	0,4015 0,1339 1,52	0,1339 0,4016 1,52	1,3791 1,4677 0,06	0,4026 0,4027 1,3			0,2262
6	0,1087 0,1088 1,61	0,3654 0,131 1,51	0,1309 0,3598 1,51	1,377 1,3777 0,02	0,254 0,5411 1,31	0,543 0,2458 1,31		0,2018
7	0,1072 0,1024 1,62	0,3426 0,1316 1,49	0,1327 0,3547 1,5	1,397 1,476 0,03	0,4061 0,3972 1,32	0,609 0,1699 1,13	0,1811 0,61 1,14	0,1887

Аналогичные расчеты проведены для других типов нелинейности и профилей пучка [8].

7°. **Повышение пиковой интенсивности в дальнем поле.** В ряде практически важных задач необходимо получить максимальную интенсивность на мишени. Рассчитать требуемое для этого распределение волнового фронта можно, используя (28). Отметим, что для  $x=y=0$  максимум интеграла (28) достигается, если показатель экспоненты равен нулю. Это реализуется в случае

$$S_{\text{упр}} = S_{\text{пл}} + (x^2 + y^2) / \bar{z}. \quad (31)$$

Разлагая  $S_{\text{пл}}$  по базисным функциям, получим оптимальные значения коэффициентов  $\theta_{pq}$ . Интересно отметить, что эти

значения  $\theta_{pq}$  отличаются от соответствующих  $\theta_{pq}$ , полученных в пп. 3°, 4°. Следовательно, достижение пиковой интенсивности на мишени, вообще говоря, может быть не связано с достижением минимальной ширины пучка на ней. Другое отличие связано с тем, что при работе адаптивной системы по критерию пиковой интенсивности для достижения ее максимального значения требуется более слабая деформация гибкого зеркала, чем при настройке по ширине пучка. В качестве иллюстрации приведем значение оптимальных коэффициентов  $\theta_{pq}$  для рассматриваемых выше типов нелинейности. Так, компенсация дополнительной расходимости светового пучка, прошедшего слой керровской среды, имеет место в случае

$$\theta_1 = \frac{1}{z} + 8\theta_{\text{нл}} \begin{cases} 1, & f_{\text{г}}, \\ (-1), & f_{\text{тр}}, \end{cases} \theta_p = (-1)^p 8\theta_{\text{нл}} \begin{cases} 1/k!, & f_{\text{г}}, \\ 1/(k-2)! & f_{\text{тр}}, \end{cases} \quad (32)$$

где в качестве базисных функций выбраны  $r^{2p}$ . Отметим, что при прохождении световым импульсом слоя неподвижной дефокусирующей среды с тепловым механизмом нелинейности  $\theta_{\text{нл}}$  становится функцией времени и (32) описывает динамическую компенсацию дополнительной расходимости.

Аналогичные расчеты проводились нами и для других типов нелинейности.

Таким образом, в настоящей работе приведены результаты анализа работы многопараметрических адаптивных систем, при этом использовались как аналитические методы анализа, так и результаты численного эксперимента. Разработанные модели позволяют построить дискретные алгоритмы управления параметрами абберрационного волнового фронта, проанализировать их устойчивость, сходимость и т. д.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1982, т. 46, № 10, с. 1933—1938.
2. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — Квантовая электроника, 1984, т. 11, № 4, с. 693—700.
3. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1984, т. 48, № 7, с. 1424—1429.
4. Кожевникова И. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — Изв. вузов. Физика, 1985, № 2, с. 19.
5. Трофимов В. А. — Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия, 1984, т. 25, № 1, с. 105—108.
6. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1984, т. 48, № 7, с. 1400—1406.
7. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1984, т. 27, № 12.
8. Сухоруков А. П., Трофимов В. А., Шамеева Т. Ю. — Квантовая электроника, 1985, т. 12, № 2, с. 355.
9. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: Бюл. ВИНТИ, 1964.
10. Чесноков С. С. — Квантовая электроника, 1983, т. 10, № 6, с. 1160—1165.
11. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — В кн.:



Тез. докл. XI Всес. конф. по когерентной и нелинейной оптике. Т. 2. — Ереван, 1982, с. 820—821.

12. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981.

13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.

14. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. — Тр. ИЭМ. Оптика атмосферы. Вып. 31 (105). — М.: Гидрометеоздат, 1983, с. 105—110.

15. Christiansen W. H., Wasserstrom E. — J. Phys., 1980, v. 41, p. 9.

*В. С. Арсфьев*

## УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучению устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих нелинейные параболические и гиперболические уравнения и системы уравнений, посвящено много работ, см., например, [1—3]. В предлагаемой работе исследуются устойчивость и сходимость одной разностной схемы, аппроксимирующей систему нелинейных параболических уравнений. Эту систему можно рассматривать как модельную для задачи о вытеснении магнитного поля, вмороженного в плазму, облаком горячих электронов [4].

Наряду с нелинейной системой разностных уравнений рассматривается линейная разностная схема, определенная на прямой сумме пространств и имеющая структуру, сходную со структурой нелинейной схемы. Для линейной схемы построена энергетическая норма, в которой необходимые условия устойчивости являются достаточными. Для нелинейной системы разностных уравнений получены достаточные условия устойчивости в аналогичной норме.

Отметим, что линейные разностные схемы на прямой сумме пространств рассматривались, например, в работах [5—6].

1°. **Исходная задача. Семейство разностных схем.** Будем рассматривать разностные схемы, аппроксимирующие систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Предполагается, что эта система имеет для некоторого класса начальных условий решения с ограниченными вторыми по  $t$  и четвертыми по  $x$  производными.

Аппроксимируем (1) семейством разностных схем с весом  $\sigma \geq 0$ :

$$\begin{cases} y_{t,i} + \Delta y_i^\sigma = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ z_{t,i} + \Delta z_i^\sigma - (y_{t,i})^2 = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0(t_n) = y_N(t_n) = z_0(t_n) = z_N(t_n) = 0, & n = 0, 1, \dots, \\ y_i(t_0) = \varphi(x_i), \quad z_i(t_0) = \psi(x_i), & i = 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Delta y_i = -y_x, x, i, i = 1, \dots, N-1$ ;  $y^\sigma = \sigma \hat{y} + (1-\sigma)y$ . Погрешность аппроксимации  $O(\tau + h^2)$  при  $\sigma \neq 0,5$  и  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\sigma = 0,5$  (в работе использованы понятия и обозначения, принятые в теории разностных схем, см., например [7]).

2°. Представление схемы в операторном виде. Будем рассматривать разностные схемы как операторные уравнения в конечномерных линейных пространствах сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, \dots, N, h = 1/N\}$  и обращающихся в нуль в граничных узлах. Обозначим эти пространства через  $H = H_h$ . Кроме того, введем следующие обозначения:

$(y, z)_D = \sum_{i=1}^{N-1} (Dy)_i z_i h$  — скалярное произведение в  $H$ , порожденное некоторым самосопряженным положительным оператором  $D = D^* > 0$ ;

соответствующая скалярному произведению энергетическая норма

$$\|y\|_D = \sqrt{(y, y)_D};$$

норма для операторов из  $H$  в  $H$

$$\|A\|_{D^*} = \sup_{x \neq 0} (\|Ax\|_D / \|x\|_D);$$

норма  $\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|$ .

В случае когда  $D = E$ , индекс  $E$  будем опускать. Кроме того, обозначим через  $H \oplus = H_1 \oplus H_2$  прямую сумму двух пространств  $H_1$  и  $H_2$ . Скалярное произведение и норма в  $H \oplus$  связаны со скалярным произведением в каждом пространстве следующим образом:

$$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_1 + (\cdot, \cdot)_2, \quad \|\cdot\|^2 = \|\cdot\|_1^2 + \|\cdot\|_2^2.$$

Предполагается, что нормы в  $H$  согласованы [7] с некоторыми нормами в пространстве исходных функций.

Перепишем теперь систему (2) в операторном виде:

$$F(Y, Y) \equiv Y_t + A_0 Y^\sigma + A_1(Y) = 0, \quad (3)$$

где  $Y = Y(t_n) = (y(t_n); z(t_n))^T \in H \oplus F$ ,  $A_0, A_1$  — операторы из  $H \oplus$  в  $H \oplus$ ;

$$A_0 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \quad A_1(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -[(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1} \Delta y]^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем линейный оператор  $B$  и линейный оператор  $A(Y)$ , зависящий от  $Y$  как от параметра (этот оператор задается матри-

цей, элементы которой — функции от  $Y$ ), такие, что имеет место представление

$$F(\hat{Y}, Y) - F(\hat{U}, U) = B(\hat{Y} - \hat{U}) - A(Y)(Y - U), \quad (4)$$

где  $U = U(t_n) = (u_h(t_n), v_h(t_n))^T \in H \oplus$  — проекция на  $H \oplus$  решения задачи (1). Нетрудно видеть, что оператор  $B$  задается формулой

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} E + \sigma \Lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} E + \sigma \Lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Определим оператор  $A$ . Справедлива следующая

**Л е м м а.** Пусть оператор  $F$  задается формулой (3). Тогда существует линейный оператор  $A$ , такой, что

$$\Delta F \equiv F(\mathcal{O}, Y) - F(\mathcal{O}, U) = A(Y)(Y - U).$$

Оператор  $A$ , зависящий от  $Y$ , как от параметра  $A = A(Y)$ , можно представить так:

$$A(Y) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $A_{11} = A_{22} = -\frac{1}{\tau} E + (1 - \sigma) \Lambda$ ,  $A_{21}(Y) = \Phi(Y) \Lambda$ , причем для нормы оператора  $\Phi(Y)$  имеет место оценка

$$\|\Phi(Y)\|_* \leq \frac{4}{h^2} \|y - u_h\|_c + 2 \|\Lambda u_h\|_c.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2)^T$ , то

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= \left( -\frac{1}{\tau} E + (1 - \sigma) \Lambda \right) (z - v_h) - \{[(E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda y]^2 - \\ &\quad - [(E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda u_h]^2\} = \left( -\frac{1}{\tau} E + (1 - \sigma) \Lambda \right) (z - v_h) - \\ &\quad - C_1(Y) [(E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda (y - u_h)], \end{aligned}$$

где  $C_1(Y)$  задается диагональной матрицей

$$C_1(Y) = \text{diag} \left( (E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} (\Lambda y_i + \Lambda u_{hi}) \right)_{i=1}^{N-1},$$

следовательно,

$$A_{21}(y - u_h) = -C_1(Y) (E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda (y - u_h) = \Phi(Y) \Lambda (y - u_h).$$

Оценим норму  $C_1$ . Так как

$$\begin{aligned} \|C_1 \omega\|^2 &\leq \|(E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda (y - u_h)\|_c^2 \|\omega\|^2 + \\ &\quad + 4 \|(E + \sigma \tau \Lambda)^{-1} \Lambda u_h\|_c^2 \|\omega\|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left( \frac{16}{h^4} \|y - u_h\|_C^2 + 4 \|\Delta u_h\|_C^2 \right) \|\omega\|^2,$$

то получим

$$\|C_1(Y)\|_* \leq \frac{4}{h^2} \|y - u_h\|_C + 2 \|\Delta u_h\|_C,$$

откуда

$$\|\Phi(Y)\|_* \leq \frac{4}{h^2} \|y - u_h\|_C + 2 \|\Delta u_h\|_C.$$

Лемма доказана.

Оператор (6) как раз и является искомым оператором в представлении (4).

Прежде чем перейти к исследованию устойчивости, приведем определение устойчивости.

Определение. Будем говорить, что решение разностной схемы (3) устойчиво на решении  $(u(x, t), v(x, t))$  задачи (1), если для всех  $Y(t_0)$ , таких, что  $\|Y(t_0) - U(t_0)\|_D$  и  $\|F(\bar{U}, U)\|_{D^*}$  достаточно малы,  $\tau < \tau_0$  и  $h < h_0$  имеет место оценка

$$\|Y(t_n) - U(t_n)\|_D \leq \|Y(t_0) - U(t_0)\|_D + M \max_t \|F(\bar{U}, U)\|_D, \quad (7)$$

где  $\tau_0 > 0$ ,  $h_0 > 0$  — некоторые положительные числа;  $D$  — самосопряженный положительный оператор;  $M$  — постоянная, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ .

Из представления (4), учитывая, что  $F(Y, Y) = 0$ , видно, что для оценки (7) достаточно выполнения неравенств

$$\|B^{-1}A(Y)\|_{D^*} \leq 1, \quad \|B^{-1}\|_{D^*} < \tau$$

для всех  $Y$  из некоторой окрестности  $U$ . В этом случае в оценке (7) постоянная  $M = T \geq n\tau$ . Из этой оценки в случае аппроксимации, т. е.  $F(\bar{U}, U) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ , следует сходимость, если  $\|Y(t_0) - U(t_0)\|_D \rightarrow 0$ .

Отметим, что в любой норме при  $\sigma \geq 0$  выполняется оценка  $\|B^{-1}\|_* \leq \tau$ , поэтому задача свелась к поиску нормы  $\|\cdot\|_D$ , такой, что  $\|B^{-1}A(Y)\|_{D^*} \leq 1$  выполняется при минимальных ограничениях на  $\tau$  и  $h$ .

Для построения оператора  $D$  рассмотрим линейную разностную схему, которая в представлении вида (4) имеет операторы сходной с (5) и (6) структуры, а именно:

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} E + (1 - \sigma)\Lambda & 0 \\ \alpha\Lambda & -\frac{1}{\tau} E + (1 - \sigma)\Lambda \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} E + \sigma\Lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} E + \sigma\Lambda \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — некоторая ненулевая постоянная.

3°. Устойчивость линейной разностной схемы. Необходимым условием устойчивости схемы, задаваемой операторами (8), является условие  $(2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda) \geq 0$ . Покажем это.

Оператор перехода данной схемы имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ s_{21} & s_2 \end{pmatrix},$$

где  $s_1 = s_2 = E - \tau(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda$  и  $s_{21} = -\alpha\tau(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda$ . Необходимым условием устойчивости является условие, при котором собственные числа  $S$  не превосходят по абсолютной величине единицу. Если  $\lambda$  — собственное значение оператора  $S$ , то оно же является и собственным числом  $s_1$ . Так как  $s_1 = s_1^* > 0$ , то условие  $|\lambda(s_1)| \leq 1$  эквивалентно условию  $\|s_1\|_* \leq 1$ , из которого следует неравенство  $2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda \geq 0$ .

Построим норму  $D$ , в которой для произвольного  $\varepsilon > 0$  условие

$$2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda \geq \varepsilon E \quad (9)$$

достаточно для устойчивости. Оператор  $D$  будем искать в виде

$$D = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 \\ 0 & d_2^{-1} \end{pmatrix},$$

где  $d_i$  ( $i=1, 2$ ) — самосопряженные положительные операторы, перестановочные с  $\Lambda$ . Условие  $\|B_n^{-1}A_n\|_{D*} \leq 1$  при  $B_n B_n^* > 0$  и  $A_n A_n^* > 0$  эквивалентно операторному неравенству

$$P = B_n D^{-1} B_n^* - A_n D^{-1} A_n^* \geq 0.$$

Если

$$P = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12}^* & p_{22} \end{pmatrix},$$

то нетрудно получить, что

$$p_{11} = \Lambda(2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda)d_1,$$

$$p_{12} = \alpha\Lambda(E - (1 - \sigma)\tau\Lambda)d_1,$$

$$p_{22} = \Lambda[(2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda)d_2 - \alpha^2\tau\Lambda d_1].$$

Известно [8], что для неотрицательности  $P$  достаточно выполнения неравенств  $p_{11} > 0$  и  $Q = p_{22} - p_{12}^* p_{11}^{-1} p_{12} \geq 0$ . Неравенство  $p_{11} > 0$  выполняется при условии (9). Проведя преобразования, получим, что

$$Q = (2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda)^{-1} [(2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda)^2 d_2 - \alpha^2 (E + \sigma\tau\Lambda)^2 d_1] \tau\Lambda.$$

Следовательно,  $Q \geq 0$ , если

$$(2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda)^2 d_2 \geq \alpha^2 (E + \sigma\tau\Lambda)^2 d_1.$$

Возьмем в качестве

$$d_1 = \Lambda^{-1}(E + \sigma\tau\Lambda)^{-2}; \quad d_2 = \alpha^2\Lambda^{-1}(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda)^{-2}.$$

Если

$$\tau/h^2 \leq \lambda < \infty \quad (10)$$

и выполнено условие (9), то норма, порожденная оператором

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda(E + \sigma\tau\Lambda)^2 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2}\Lambda(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda)^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

эквивалентна норме, порожденной оператором

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}.$$

Это следует из неравенства

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \beta_0\Lambda \end{pmatrix} \leq D \leq \begin{pmatrix} (1+4\sigma\lambda)^2\Lambda & 0 \\ 0 & 4\gamma_0\alpha^{-2}\Lambda \end{pmatrix},$$

где  $\beta_0 = \varepsilon^2$ ,  $\gamma_0 = 1$  при  $\sigma \leq 0,5$  и  $\beta_0 = 4$ ,  $\gamma_0 = (1+2\lambda)(2\sigma-1)^2$  при  $\sigma > 0,5$ . Таким образом, доказана следующая

**Теорема 1.** Разностная схема  $B_{\text{л}}Y + A_{\text{л}}Y = 0$ , где  $A_{\text{л}}$  и  $B_{\text{л}}$  определяются формулой (8), устойчива в норме, порожденной оператором (11) при выполнении условия (9). При этом для любого фиксированного  $\lambda < \infty$  из (10) норма, задаваемая оператором (11), эквивалентна норме, порожденной оператором  $\Lambda_0$ .

**З а м е ч а н и е.** При  $\sigma \leq 0,5$  ограниченность  $\lambda$  следует из условия (9). При  $\sigma \geq 0,5$  в качестве нормы  $\|\cdot\|_D$  можно выбрать более простую и при этом не потребуются выполнение (10). Так как линейный случай обобщается на нелинейный и условие ограниченности  $\lambda$  из условия (10) остается в любом случае, то и в этом случае норма  $\|\cdot\|_D$  остается одной при всех  $\sigma$ .

**4°. Устойчивость нелинейной разностной схемы.** Покажем, что можно указать  $\alpha \geq 0$  такое, что схема (3) будет устойчива на решении задачи (1) в энергетической норме, порожденной оператором (11). Вычислим оператор  $P = BD^{-1}B^* - AD^{-1}A^*$ .

$$\text{Если } P = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12}^* & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{то}$$

$$p_{11} = (E + \sigma\tau\Lambda)^{-2}(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda),$$

$$p_{12} = (E + \sigma\tau\Lambda)^{-2}(E - (1-\sigma)\tau\Lambda)\Phi,$$

$$p_{22} = \alpha^2(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda)^{-1} - \Phi\tau\Lambda(E + \sigma\tau\Lambda)^{-2}\Phi.$$

Так как условие (9) означает, что  $p_{11} > 0$ , то  $P \geq 0$ , если  $Q = p_{22} - p_{12}^* p_{11}^{-1} p_{12} \geq 0$ . Вычисляя  $Q$ , получим

$$Q = \alpha^2(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda)^{-1} - \Phi(2E - (1-2\sigma)\tau\Lambda)^{-1}\Phi. \quad (12)$$

Пусть начальные данные и погрешность аппроксимации такие, что

$$\begin{cases} \|Y(t_0) - U(t_0)\|_{\Lambda_0} \leq M_0 h^2 / (1 + 4\sigma\lambda)^2, \\ \max \|F(\hat{U}, U)\|_{\Lambda_0} \leq M_1 h^2 / (1 + 4\sigma\lambda)^2. \end{cases} \quad (13)$$

Обозначим через  $C = 2M_0 + 2TM_1 + 2\|\Lambda u_h\|_c$ . Сформулируем и докажем теорему об устойчивости решения схемы (3).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (10) и (13) для некоторых постоянных  $\lambda$ ,  $M_0$  и  $M_1$ .

При  $0,5 > \sigma \geq 0$  разностная схема (3) устойчива на решении задачи (1), если выполнено условие (9) для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Схема устойчива в энергетической норме, задаваемой оператором (11), с  $\alpha^2 = 2C^2/\varepsilon$ .

При  $\sigma \geq 0,5$  разностная схема (3) устойчива на решении (1) в энергетической норме, задаваемой оператором (11) с  $\alpha^2 = (1 + 2\lambda)C^2$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $G = 2E - (1 - 2\sigma)\tau\Lambda = G^* \geq \varepsilon > 0$ .

Пусть  $0,5 > \sigma \geq 0$ . Тогда  $0,5E \leq G^{-1} \leq \varepsilon^{-1}E$ . Если  $\|\Phi(Y(t_n))\|_* \leq C$ , то при  $\alpha^2 = 2C^2/\varepsilon$  из (12) следует, что  $Q(t_n) \geq 0$ .

Докажем по индукции, что  $\|\Phi(Y(t_n))\|_* \leq C$  для всех  $n = 0, 1, \dots$ . Для  $n = 0$  имеет место

$$\|\Phi(Y(t_0))\|_* \leq 2M_0(1 + 4\sigma\lambda)^{-2} + 2\|\Lambda u_h\|_c \leq C.$$

Предположим, что  $\|\Phi(Y(t_k))\|_* \leq C$  для  $k = 0, 1, \dots, n$ ; покажем, что  $\|\Phi(Y(t_{n+1}))\|_* \leq C$ . По предположению

$$\begin{aligned} \|Y(t_{n+1}) - U(t_{n+1})\|_D &\leq \|Y(t_0) - U(t_0)\|_D + \\ &+ T \max_k \|F(U(t_{k+1}), U(t_k))\|_D, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \|y(t_{n+1}) - u_h(t_{n+1})\|_c &\leq 0,5 \|y(t_{n+1}) - u_h(t_{n+1})\|_{d_1} \leq \\ &\leq 0,5(1 + 4\sigma\lambda)^2 \|y(t_0) - u_h(t_0)\|_{\Lambda^+} + \\ &+ 0,5T(1 + 4\sigma\lambda)^2 \max_k \|F(U(t_{k+1}), U(t_k))\|_{\Lambda} \leq \\ &\leq 0,5M_0h^2 + 0,5TM_1h^2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|\Phi(Y(t_{n+1}))\|_* \leq C,$$

т. е. предположение индукции доказано. Утверждение доказано.

Случай  $\sigma \geq 0,5$  рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. В. Гулину за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ляшко А. Д., Федотов Е. М. О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем. — Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1304—1316.
2. Абрашин В. Н. Об одном классе разностных схем для нелинейных нестационарных задач математической физики. — Препринт Ин-та математики АН БССР. — Минск, 1982, № 17 (142).
3. Абрашин В. Н., Дриц В. В. Устойчивые разностные схемы газодинамики. — Препринт Ин-та математики АН БССР. — Минск, 1981, № 8 (109).
4. Гордеев А. В., Рудаков Л. И., Шуваев В. Ю. Вытеснение магнитного поля облаком горячих электронов. — ЖЭТФ, 1983, т. 85, вып. 1(7), с. 155—165.
5. Гулин А. В. Устойчивость разностных схем и операторные неравенства. — Дифференциальные уравнения, 1979, т. 15, № 12, с. 2238—2250.
6. Арделян Н. В., Черниговский С. В. Об устойчивости одной операторно-разностной схемы, определенной на прямой сумме пространств. — Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика, 1984, № 1, с. 32—37.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

*А. Ф. Васильев, В. Я. Галкин, Е. Л. Жуковский*

## О СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ИЗОКИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Различные аспекты изопараметричности и, в частности, изокинетической температуры  $T_{из}$  рассмотрены в [1], некоторые физические аспекты этого вопроса затронуты в [2]. Здесь исследуется статистическая обработка экспериментальных данных с целью установления самого факта существования  $T_{из}$  как экспериментального явления и затем оценки ее величины. С этой точки зрения нам необходимо только определение  $T_{из}$  в качестве температуры, при которой для некоторого родственного набора реакций константы равновесия или константы скоростей становятся равными друг другу, что соответствует наличию общей точки пересечения кривых температурной зависимости этих величин.

Для подавляющего большинства одностадийных химических реакций зависимость логарифма этих констант от обратной абсолютной температуры в пределах точности эксперимента описывается линейной регрессионной зависимостью  $\lg K^i = a + b(1/T_i)$ . Так как температура эксперимента обычно регистрируется намного точнее, чем определяются константы равновесий или скоростей, то для оценки параметров линейной регрессии может быть использован обычный метод наименьших квадратов (МНК) для  $y_i^j \Rightarrow \lg K^i$  и  $x_i^j \Rightarrow T_i^{-1}$ ;  $y_i^j = a_j + b_j x_i^j$ : верхний индекс соответствует номеру температурного эксперимента, а нижний — номеру реакции. Это позволяет получить несмещенные оценки параметров регрессии, а правильный выбор весов ошибок  $y_i^j$  дает оценки с минимальной дисперсией [3].

Даже если  $T_{из}$  существует, экспериментальные кривые из-за



«ошибок не пересекаются в одной точке. В таком случае для определения этой точки необходимо ввести какой-нибудь критерий, определяющий наиболее плотное прилегание этой точки ко всем экспериментальным кривым. Рассмотрим возникающие при этом трудности, ограничиваясь простым случаем только линейной зависимости логарифмов констант от обратной температуры. Казалось бы, естественно использовать МНК для определения точки пересечения аналогично его применению для оценки параметров линейной регрессии:

$$\rho = \min \sum_1^m (y^0 - a_j - b_j x^0)^2. \quad (1)$$

Если в качестве критерия использовать минимум суммы квадратов длин всех перпендикуляров, опущенных из искомой точки на все прямые, то получим выражение, аналогичное (1), но с весами

$$\rho' = \min \sum_1^m w^j (y^0 - a_j - b_j x^0)^2, \quad (1')$$

где  $w^j = (1 + b_j^2)^{-1}$ . Ясно, что  $\rho$  или  $\rho'$  с точностью до обозначений совпадают с условием МНК для нахождения коэффициентов линейной регрессии  $y^0$  и  $x^0$  ( $y^0$  — свободный член,  $x^0$  — тангенс угла наклона) для точек  $(a_j, b_j)$ , где  $a_j \Rightarrow y_j$ , а  $b_j \Rightarrow x_j$ .

Проведенный анализ показывает, что методы нахождения  $T_{из}$  как точки пересечения прямых линейной регрессии  $\lg K_j^i$  от  $T_i^{-1}$  или как коэффициента линейной регрессии для точек, образованных, в свою очередь, параметрами линейной регрессии ( $\lg K_j^i$  от  $T_i^{-1}$ ), эквивалентны друг другу. Этот результат неудивителен и соответствует известному в геометрии факту, когда многие теоремы в проективной геометрии остаются справедливыми при перестановке понятий «точка» и «прямая» [4]. Поэтому имеющееся мнение [1], что нахождение  $T_{из}$  как коэффициента линейной регрессии для точек  $(\Delta S_j, \Delta H_j)$  некорректно, а необходимо для корректного нахождения этой величины искать точку пересечения прямых регрессий  $\lg K_j^i$  от  $T_i^{-1}$ , основано на недоразумении.

Как видно из вышеизложенного, оба метода эквивалентны и дают один и тот же квадратичный функционал для нахождения  $y^0, x^0$ . Однако минимизация подобных функционалов дает несмещенные оценки, только если преобладают ошибки  $a_j$ , а ошибками  $b_j$  можно пренебречь. Это условие не выполняется: ошибки в  $a_j$  и  $b_j$  сравнимы и сильно коррелированы. Отсюда следует, что оба критерия не позволяют получить несмещенные оценки  $T_{из}$ . Эти примеры показывают трудности, которые необходимо преодолеть, используя представления о нахождении точки пересечения пучка прямых.

Двойственная задача — нахождение прямой по данному набору точек — значительно лучше исследована и, как будет видно

ниже, позволяет сформулировать довольно простые процедуры несмещенного оценивания  $T_{из}$ . В нашем случае  $y_j \Rightarrow a_j$ ,  $x_j \Rightarrow b_j$ ; ошибки  $a_j$  и  $b_j$  определяются ковариационной матрицей

$$\text{cov}(a, b) = \frac{1}{n(\overline{T^{-2}} - \overline{T^{-1}^2})} \begin{pmatrix} \overline{T^{-2}} & -\overline{T^{-1}} \\ -\overline{T^{-1}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где черта означает то или иное усреднение.

Если в качестве единицы измерения по оси  $X$  выбрать величину  $(\overline{T^{-2}})^{1/2}$ , то  $\lg K = a + b_n T_n^{-1}$ ;  $T_{нi} = T_i (\overline{T^{-2}})^{1/2}$ ,  $b_n = b (\overline{T^{-2}})^{1/2}$ ,  $\Delta H_n = \Delta H (\overline{T^{-2}})^{1/2}$  и

$$\text{cov}(a, b_n) = \frac{1}{n(1 - \rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\rho = \rho(a, b) = -\overline{T^{-1}} / (\overline{T^{-2}})^{1/2}, \quad (4)$$

а  $\rho(\Delta S, \Delta H) = -\rho$  ( $\rho$  — коэффициент корреляции между ошибками  $a$  и  $b$ ). Отношения осей эллипса ошибок, соответствующего ковариационной матрице (3), равно отношению собственных значений этой матрицы:

$$\lambda_1 / \lambda_2 = (1 + \rho) / (1 - \rho), \quad (5)$$

а большая ось такого эллипса всегда направлена под углом  $135^\circ$  в координатах  $a, b_n$ , или  $45^\circ$  в координатах  $\Delta S, \Delta H_n$ , обозначающих приращения энтропии и энтальпии.

Методы оценки коэффициентов прямой предполагают независимость ошибок, поэтому необходимо перейти к координатам с независимыми ошибками [5, 6]. Для рассматриваемого случая нормированных координат  $a, b_n$  новые переменные с независимыми ошибками будут связаны со старыми особенно просто:

$$u_i = \sqrt{2} a_i + \sqrt{2} b_{ni}, \quad v_i = \sqrt{2} a_i - \sqrt{2} b_{ni} \quad (6)$$

или

$$X_i = \sqrt{2} \Delta S_i - \sqrt{2} \Delta H_{ni}, \quad Y_i = \sqrt{2} \Delta S_i + \sqrt{2} \Delta H_{ni}. \quad (6')$$

При оценке только  $T_{из}$  множитель  $\sqrt{2}$  в (6) или (6') может быть опущен.

В зависимости от отношения ошибок новых переменных, т. е. в зависимости от отношения величин полуосей эллипса ошибок, должны быть использованы или обычный МНК, или ортогональный. В соответствии с (5) это отношение определяется только коэффициентом  $\rho$ , в свою очередь зависящим лишь от условий эксперимента: температурного диапазона и распределения точек отсчета внутри него (см. (4)).

Значения коэффициентов корреляции и отношения полуосей эллипсов ошибок ( $\Delta S$ ,  $\Delta H$ )

Диапазон температур		Равномерное усреднение		Отсчеты в крайних точках	
		$\overline{(1/T)^2} = 1/T_1 T_2$		$\overline{(1/T)^2} = 1/2(1/T_1^2 + 1/T_2^2)$	
$T_1$ , К	$T_2$ , К	$\overline{(1/T)} = \ln(T_2/T_1)/(T_2 - T_1)$		$\overline{(1/T)} = 1/2(1/T_1 + 1/T_2)$	
		$\rho$	$\lambda_1/\lambda_2$	$\rho$	$\lambda_1/\lambda_2$
300	330	.9996	5000	.9989	1817
300	400	.9966	580	.9899	198
200	400	.9803	100	.9464	38

В табл. 1 представлены результаты расчета для двух крайних случаев проведения эксперимента: равномерное усреднение по всему температурному диапазону с бесконечным числом отсчетов (среднее интегральное значение) и среднее значение по двум крайним точкам. Для семи точек, расположенных равномерно через 5 К в интервале 300 ÷ 330 К,  $\rho = 0,9995$ , т. е., как и можно было ожидать, расположено между двумя крайними значениями, ближе к равномерному распределению температур.

Во всех рассмотренных примерах  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ , и можно использовать обычный МНК даже для такого большого температурного интервала, как 200 К. В большинстве практических случаев он значительно уже и редко превышает 100 К, т. е. в новых координатах для оценки тангенса угла наклона практически всегда можно использовать обычный МНК, а для проверки гипотезы, что все прямые принадлежат одному пучку (пересекаются в одной точке и для всех реакций данной группы существует одна изокINETическая температура), — использовать двойственное представление, что все точки ( $Y^i$ ,  $X^i$ ) принадлежат одной прямой. Последняя задача для случайных некоррелированных величин хорошо известна.

Если тангенс угла наклона  $b_{XY} = \text{tg } \varphi_{yx}$  в координатах  $Y$ ,  $X$  велик ( $\varphi_{yx} \approx 90^\circ$ ), т. е. в координатах  $a$ ,  $b_H$  или  $\Delta S$ ,  $\Delta H_H$  тангенс близок к минус или плюс единице соответственно, то нужно сначала проверить гипотезу об отличии линии регрессии от  $X = \text{const}$ . Это можно сделать обычным способом, сравнивая остаточную сумму квадратов

$$(n-1)R_{n-1} = \sum_1^n (Y^i - \bar{Y})^2 \quad (7)$$

с остаточной суммой квадратов для линейной регрессии

$$(n-2)R_{n-2} = \sum_1^n (Y^i - a - bX^i)^2 \quad (7')$$

и используя распределение Фишера для  $n-1$  и  $n-2$  степеней свободы [3]. Отношение  $R_{n-1}/R_{n-2}$  должно быть не меньше  $F_{n-1, n-2}$ .

Если линия регрессии параллельна оси  $Y$ , то  $T_{из} = (T^{-2})^{-1/2}$  и для решения вопроса, существует ли  $T_{из}$  как физическая величина или ее происхождение обязано корреляции между ошибками  $a$  и  $b$  или  $\Delta S$  и  $\Delta H$ , необходимо более детальное исследование отличия эллипса рассеивания этих величин от эллипса их же ошибок. Параллельность линии регрессии оси  $Y$  свидетельствует только о совпадении ориентаций эллипса рассеивания и эллипса ошибок. Остается проверить значимость отличия величин осей этих эллипсов, что можно сделать также с помощью фишеровского критерия. Наиболее просто это выглядит в координатах  $X, Y$ :

$$S_Y^2 (M-1) n (1-\rho) / S^2 > F_{M-1, n-2}, \quad (8)$$

$$S_X^2 (M-1) n (1+\rho) / S^2 > F_{M-1, n-2}, \quad (8')$$

где  $M$  — число реакций в данной реакционной серии;  $n$  — число опытов с различной температурой;  $S^2$  — выборочная дисперсия для этих опытов.

Интуитивно ясно, что выполнение первого условия свидетельствует о физическом существовании  $T_{из}$ , случайно совпадающем с  $(T^{-2})^{-1/2}$ . Выполнение второго условия при первом невыполненном должно свидетельствовать о некорректности данного эксперимента, например, в величинах  $\Delta S^i$  и  $\Delta H^i$  допущены промахи. Если же  $T_{из} \neq (T^{-2})^{-1/2}$ , то

$$\frac{1}{T_{из}} = (T^{-2})^{1/2} \frac{b_{XY} - 1}{b_{XY} + 1}. \quad (9)$$

В качестве примера рассмотрим оценки  $T_{из}$  по экспериментальным данным из [7]. Для различных эфиров пирокатехина и арилфосфонистых кислот изучалась реакция конденсации при четырех температурах: 15; 25; 35; 45° С. В табл. 2 приведены значения

Таблица 2

Коэффициенты линейной регрессии  $\lg K_j^i = \lg a_j + b_j / RT_i$  для реакции конденсации пирокатехиновых эфиров арилфосфонистых кислот с метилвинилкетонном и соответствующие им величины  $\Delta S^i$ ,  $\Delta H^i$  и  $Y^i$ ,  $X^i$

кал  
( $R = 1,9872$  — газовая постоянная)  
град · мол

№	$\lg a$	$b$	$\Delta S$	$\Delta H$	$Y$	$X$
1	5,37	11,75	24,49	38,86	63,35	14,37
2	5,48	12,01	24,99	39,72	64,71	14,73
3	5,53	12,21	25,22	40,38	65,60	15,16
4	5,79	12,59	26,40	41,64	68,04	15,23
5	6,26	13,42	28,55	44,38	72,93	15,84
6	6,56	14,33	29,91	47,39	77,30	17,48
7	6,61	14,46	30,14	47,82	77,96	17,68

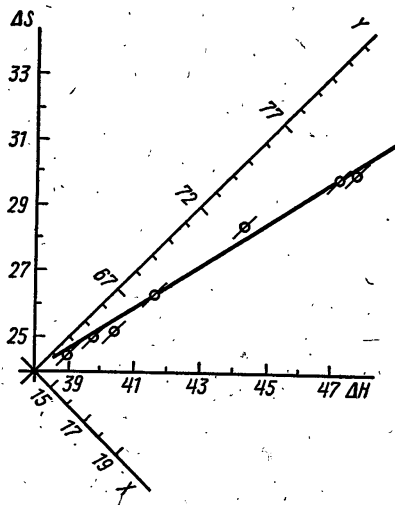


Рис. 1. Пример линейной регрессии для координат  $\Delta S$ ,  $\Delta H$  и  $Y$ ,  $X$  для реакции конденсации пирокатехиновых эфиров арилфосфористых кислот с метилвинилкетонем

$\lg a^i$ ,  $b^i$  и соответствующих им  $\Delta S^i$ ,  $\Delta H^i$ , а также  $Y^i$  и  $X^i$ , полученных по формулам (6'). На рис. 1 представлена прямая линейной регрессии в координатах  $\Delta S$ ,  $\Delta H$  и  $Y$ ,  $X$ . Отрезки прямых, проходящих через экспериментальные точки, показывают направление больших осей эллипсов ошибок. Малые оси не могут быть изображены, так как они более чем на три порядка меньше больших. Без учета коррелированности ошибок  $\lg a$  и  $b$  МНК дает следующие результаты (в кельвинах):

$$b = f(\lg a) \\ 460$$

Ортогональный МНК  
464

$$\lg a = f^{-1}(b) \\ 465$$

Как и следовало ожидать, с помощью ортогонального МНК получен промежуточный из коэффициентов прямой и обратной регрессии результат.

В координатах  $Y$ ,  $X$  с некоррелированными ошибками и с преобладающими ошибками по оси  $Y$  сначала проверим гипотезу, что прямая регрессии параллельна оси  $Y$ :

$$S_{Y(6)}^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 (Y^i - \bar{Y})^2 = 36,8082;$$

$$S_{Y(5)}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^7 (Y^i + 1,4273 - 4,5242X^i)^2 = 2,1819;$$

$$S_{Y(6)}^2 / S_{Y(5)}^2 = 16,8701 > F_{6;5;0,05} = 4,8503.$$

Гипотеза должна быть отвергнута: в случае регрессии  $Y$  от  $X$  значительно уменьшается остаточная сумма квадратов отклонений.

Линейная регрессия  $Y$  от  $X$  дает:  $b_{XY} = 4,5242$ ,  $S_{b_{YX}} = 0,4612$ ; число степеней свободы:  $f = 7 - 2 = 5$ . Коэффициент Стьюдента для 95% доверительного интервала равен 2,571, а для 70% — 1,156. Для этих доверительных интервалов  $b_{XY}$  и  $T_{из}(K)$  равны соответственно:

$$3,3385 < 3,9911 < b_{yx} = 4,5242 < 5,0573 < 5,7099,$$

$$431 < 451 < T_{из}(K) = 474 < 504 < 565.$$

$T_{из}$  вычислено по формуле (9).

Сравнение несмещенной оценки  $T_{из} = 474$  К со значениями, полученными МНК без учета корреляции между ошибками  $\Delta S$  и  $\Delta H$ , показывает, что лучший результат обычный МНК дает для регрессии  $\lg a = f^{-1}(b)$ . 95%- и 70%-ные доверительные интервалы для последней регрессии таковы:

$$417 < 442 < T_{из} K = 465 < 490 < 526.$$

Регрессия  $b = f(\lg a)$  дает оценку  $T_{из} K = 460$ , что еще на 5 К дальше от несмещенной оценки по сравнению с предыдущим результатом, т. е. смещение возрастает в 1,5 раза — с 10 до 15 К, но все оценки попадают даже в границы 70%-ного доверительного интервала. Следует обратить внимание, что учет коррелированности ошибок  $\Delta S$  и  $\Delta H$  приводит к увеличению доверительных границ, а следовательно, предъявляет более жесткие требования к эксперименту, используемому для определения изокINETической температуры.

Для оценки  $T_{из}$  можно сформулировать другую, несколько отличную от разобранной выше, процедуру, воспользовавшись ортогональностью ошибок МНК-оценок для начала координат, смещенного со значением  $\bar{X}$  [6]. Для такой центрированной по оси  $X$  оценки по сравнению с нецентрированной получаем:  $b' = b$ ,  $a' = a + b\bar{T}^{-1}$  или  $\Delta H' = \Delta H$ ,  $\Delta S' = \Delta S - \Delta H\bar{T}^{-1}$ ;  $\text{cov}(a', b') = 0$ ,  $S_{a'}^2 = S^2/n$ ,

$$S_{b'}^2 = S^2 / \sum_1^n T_i^{-2} - \frac{1}{n} \left( \sum_1^n T_i^{-1} \right)^2.$$

Для разобранного выше примера  $S_{b'}^2/S_a^2 = 67$ , т. е. практически и в этом случае для несмещенной оценки  $T_{из}$  из центрированных оценок значений  $a'_j$  и  $b'_j$  или  $\Delta S'_j$  и  $\Delta H'_j$  можно использовать обычный МНК для  $X \Rightarrow a'$  и  $Y \Rightarrow b'$  или  $X \Rightarrow \Delta S'$  и  $Y \Rightarrow \Delta H'$ . При этом

$$1/T_{из} = \bar{T}^{-1} - b_{\Delta H(\Delta S')}^{-1},$$

$b_{\Delta H(\Delta S')}$  — тангенс угла наклона для линейной корреляции  $\Delta H(\Delta S')$ .

Второй метод дает следующие значения  $T_{из}$  и его 95%- и 70%-ного доверительных интервалов:

$$431 < 451 < T_{из} K = 474 < 505 < 562.$$

Несмещенная оценка  $T_{из}$  вторым методом практически полностью совпадает с несмещенной оценкой первым методом.

В заключение найдем выражения в линейном приближении для смещений оценок МНК, использованного для коррелированных величин, воспользовавшись подходом, развитым в [6]. Пусть

$\xi_i = x_i + \delta_i$ ,  $\eta_i = y_i + \varepsilon_i$ ;  $\delta_i$  и  $\varepsilon_i$  — случайные величины с нулевым средним, образующие совместное двумерное распределение с ковариационной матрицей:

$$\text{cov}(\delta, \varepsilon) = \frac{1}{n(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \sigma_{\delta\varepsilon}/\sigma_\delta\sigma_\varepsilon,$$

$\rho \ll 1$  близко к единице, т. е. эллипс ошибок ориентирован под углом  $45^\circ$ , а определитель ковариационной матрицы близок к нулю. В этом случае  $\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_{\delta\varepsilon}^2 \approx 0$ , но  $\sigma_\delta^2 = \sigma_\varepsilon^2$ . Откуда  $\sigma_{\delta\varepsilon} = \sigma_\delta^2 = \sigma_\varepsilon^2$ ;  $x$  и  $y$  — переменные, связанные линейной зависимостью:  $y = a + bx$ .

Для линейной корреляции  $\eta(\xi)$  МНК-оценка  $b$  равна  $\hat{b} = S_{\xi\eta}/S_\xi^2$ ,  $S_\xi^2 = S_{x+\delta}^2 = S_x^2 + S_\delta^2$ ,  $S_\eta^2 = S_{y+\varepsilon}^2 = S_y^2 + S_\varepsilon^2$ ,  $S_y^2 = b^2S_x^2$ . Откуда  $S_\eta^2 = b^2S_x^2 + S_\varepsilon^2$ ,  $S_{\xi\eta} = S_{(x+\delta)(y+\varepsilon)} = S_{xy} + S_{\varepsilon\delta} + S_{\delta y} + S_{x\varepsilon}$ ,  $S_{xy} = bS_x^2$ . Но  $MS_{\delta y} = \sigma_{\delta y} = 0$  и  $MS_{x\varepsilon} = \sigma_{x\varepsilon} = 0$ , так как  $x$  и  $\varepsilon$  и  $\delta$  и  $y$  некоррелированы,

$$\begin{aligned} M\hat{b} &= MS_{\xi\eta}/MS_\xi^2 = (bDx + \sigma_\varepsilon^2)/Dx + \sigma_\varepsilon^2 = (b + \sigma_\varepsilon^2/Dx)(1 + \sigma_\varepsilon^2/Dx)^{-1} \approx \\ &\approx (b + \sigma_\varepsilon^2/Dx)(1 - \sigma_\varepsilon^2/Dx) \approx b + \sigma_\varepsilon^2(1-b)/Dx. \end{aligned}$$

Аналогично для линейной корреляции  $\xi(\eta)$

$$M\hat{b}^{-1} = b^{-1} + \sigma_\varepsilon^2(1-b^{-1})/b^2Dx.$$

Откуда

$$M\hat{b} \approx b + \sigma_\varepsilon^2(b^{-1}-1)/Dx.$$

Отношение смещений  $\Delta M\hat{b}_{\eta(\xi)}/\Delta M\hat{b}_{\xi(\eta)} \approx b$ , т. е. если  $b < 1$ , то меньше смещение для линейной корреляции  $\eta(\xi)$  при его положительном значении, а если  $b > 1$ , то меньше абсолютное смещение для обратной линейной корреляции  $\xi(\eta)$  при его отрицательном значении. Для разобранного выше примера  $b = 0,47$  для  $a(\Delta H)$ . МНК-оценка  $b$  завышена, а следовательно, оценка  $T_{из}$  занижена. Смещение для корреляции  $\Delta H(\lg a)$  должно быть приблизительно в 2 раза больше. На самом деле — в 1,5 раза больше, так как смещение рассчитывалось только в линейном приближении.

Смещение будет тем меньше, чем больше дисперсия  $x$ , т. е. чем больше диапазон изменения  $x$  и чем меньше ошибка измерения. Подчеркнем, что в отличие от стандартного отклонения  $b$  смещение этой величины все уменьшается с увеличением числа степеней свободы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пальм В. А. Основы количественной теории органических реакций. — Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1977.
2. Блюменфельд Л. А. Проблемы биологической физики. — М.: Наука, 1977.
3. Худсон Д. Статистика для физиков. — М.: Мир, 1970.

4. Бузман Г., Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. — М.: ИЛ, 1957.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
6. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
7. Васильев В. В., Разумова Н. А., Догазаева Л. В. Фосфорсодержащие гетероциклы. Кинетика конденсации пирокатехиновых эфиров арилфосфонистых кислот с метилвинилкетонами. — ЖОХ, 1976, т. 46, № 3, с. 463—468.

*А. Г. Белов, В. Я. Галкин*

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНОНЕЙМАНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Описание процесса регистрации продуктов множественных ядерных реакций приводит к распределению, обобщающему «инфекционное» распределение Неймана типа А [1] с функцией вероятностей (ф. в.)  $P\{\xi = n\} = p_n$  вида [2, 3]

$$p_n = p_0 \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^n g_n^{(m)}(y_1, \dots, y_k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $p_0 = \exp\left\{-\sum_{v=1}^k (y_v - \lambda_v)\right\}$ ;  $y_v = \lambda_v e^{-\varepsilon v}$ ,  $v = \overline{1, k}$ ;  $\varepsilon$  — эффективность

регистрации;  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — параметры пуассоновского распределения для случайных величин (с. в.) чисел  $\zeta_v$  осуществления реакций множественности  $v$  ( $v = \overline{1, k}$ ); с. в.  $\xi$  — общее число зарегистрированных продуктов ядерных реакций, а «коэффициенты»  $g_n^{(m)} = g_n^{(m)}(y_1, \dots, y_k)$  задаются производящей функцией

$$G(x; y_v) = \left( \sum_{v=1}^k y_v (e^{xv} - 1) \right)^m / m! = \sum_{n=m}^{\infty} g_n^{(m)} \frac{x^n}{n!}.$$

При этом первые два момента с. в.  $\xi$  следующим образом выражаются через параметры  $\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  [2]:

$$E\xi = \varepsilon \sum_{v=1}^k v \lambda_v, \quad (2)$$

$$D\xi = \varepsilon \sum_{v=1}^k (1 + \varepsilon v) v \lambda_v. \quad (3)$$

Цель настоящей работы — выделить эффективные и в то же



время по возможности простые способы оценки неизвестных параметров распределения (1). При этом сравнительным критерием эффективности способа оценки параметра будет зависимость от относительной ошибки  $\delta \hat{\lambda}_v = \sqrt{D \hat{\lambda}_v} / \lambda_v$ , допускаемой методом при построении оценки, от среднего числа продуктов реакций  $\alpha = \sum_1^k \nu \lambda_\nu$ . Изложение здесь и далее будет вестись для частного, реализуемого на практике случая  $k=2$  и заданной эффективности регистрации  $\varepsilon$ .

2°. Воспользовавшись теоремой Рао—Крамера, условия применимости которой легко проверяются, по выборке  $\{n_1, \dots, n_N\}$ , образованной  $N$  независимыми одинаково (по (1)) распределенными наблюдениями, найдем нижнюю границу дисперсии оценок  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k$ . По этой теореме вектор несмещенных оценок  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k)$  имеет ковариационную матрицу  $V$ , удовлетворяющую неравенству

$$V \geq \Phi^{-1};$$

где  $\Phi$  — информационная матрица Фишера:

$$\Phi = \left\| E \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_\nu} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_\mu} \right) \right\| = \left\| N \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda_\nu} \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda_\mu} \right\|, \quad \nu, \mu = \overline{1, k}$$

( $L = \prod_1^N p_{n_i}$  — функция правдоподобия для выборки  $\{n_1, \dots, n_N\}$ ). С учетом соотношения для производных ф.в.  $p_n$  по параметрам  $\lambda_\nu, \nu = \overline{1, k}$  [6]

$$\frac{\partial p_n}{\partial \lambda_\nu} = e^{-\varepsilon \nu} \sum_{r=0}^n \frac{(\varepsilon \nu)^r}{r!} p_{n-r} - p_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\Phi$  принимает вид

$$\Phi = N \begin{pmatrix} e^{-2\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{p_n} - 1 & e^{-3\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{p_n} - 1 \\ e^{-3\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{p_n} - 1 & e^{-4\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{p_n} - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

(обозначено  $a_n = \sum_{l=0}^n p_l \varepsilon^{n-l} / (n-l)!$ ,  $b_n = \sum_{l=0}^n p_l (2\varepsilon)^{n-l} / (n-l)!$ ).

Или с учетом рекуррентного соотношения для ф.в.  $p_n$  [7] при  $k=2$

$$(n+1) p_{n+1} = \sum_{l=0}^n \sum_{\nu=1}^2 y_\nu p_l (\varepsilon \nu)^{n+1-l} / (n-l)!, \quad n = 0, 1, \dots,$$

матрица (4) запишется как

$$\Phi = N \begin{pmatrix} e^{-2\varepsilon i_{11}} - 1 & e^{-3\varepsilon} \frac{i_{12} - \varepsilon y_1 i_{11}}{2\varepsilon y_2} - 1 \\ e^{-3\varepsilon} \frac{i_{12} - \varepsilon y_1 i_{11}}{2\varepsilon y_2} - 1 & e^{-4\varepsilon} \frac{i_{22} - 2\varepsilon y_1 i_{12} + (\varepsilon y_1)^2 i_{11}}{(2\varepsilon y_2)^2} - 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где обозначено

$$i_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 / p_n, \quad i_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_{n+1} (n+1) / p_n, \quad i_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 p_{n+1}^2 / p_n.$$

При обращении на ЭВМ матрицы  $\Phi$  возникает проблема приближенного вычисления рядов, присутствующих в (4), (5). Сходимость их может быть обоснована из признаков сравнения числовых рядов, при этом удается получить оценки сверху и снизу для остатка соответствующего ряда и тем самым оценить скорость сходимости частичных сумм для  $i_{11}$ ,  $i_{12}$ ,  $i_{22}$ .

Обратимся к некоторым способам оценивания  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

3°. Оценки максимального правдоподобия асимптотически не смещены и эффективны. В этом смысле метод максимального правдоподобия получения  $\hat{\lambda}_1$ ,  $\hat{\lambda}_2$  наилучший. Однако его численная реализация затруднительна, так как приходится решать нелинейную систему уравнений (в нашем случае)

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_\nu} = e^{-\varepsilon \nu} \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{n_i} p_l (\varepsilon \nu)^{n_i - l} / (n_i - l)! p_{n_i} - N = 0, \quad \nu = 1, 2.$$

Вообще говоря, не гарантированы существование и единственность решения такой системы. Кроме того, при организации итерационной процедуры нахождения м.п.-оценок необходимо иметь хорошие начальные приближения для  $\hat{\lambda}_1$ ,  $\hat{\lambda}_2$ . Поэтому обратимся к более простым способам оценивания параметров, прежде всего к методу моментов.

4°. Метод моментов, оценивающий неизвестные параметры через выборочные моменты, в нашем случае ( $k=2$ ,  $\varepsilon$  — заданный параметр) приводит с учетом (2), (3) к уравнениям.

$$\varepsilon \lambda_1 + 2\varepsilon \lambda_2 = a_1, \quad (6)$$

$$\varepsilon (1 + \varepsilon) \lambda_1 + 2\varepsilon (1 + 2\varepsilon) \lambda_2 = m_2,$$

где  $a_1$ ,  $m_2$  — выборочные первый и второй центральный моменты. Уравнения (6) всегда однозначно разрешимы:

$$\lambda_1 = \varepsilon^{-2} (a_1 (1 + 2\varepsilon) - m_2), \quad (7)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \varepsilon^{-2} (m_2 - a_1 (1 + \varepsilon)) / 2.$$

Для дисперсии оценок  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$  воспользуемся тем, что [8]

$$Dm_2 = \frac{\mu_4 - \mu_2}{N} - 2 \frac{\mu_4 - 2\mu_2^2}{N^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{N^3},$$

$$Da_1 = \frac{\mu_4}{N}, \text{ cov}(m_2, a_1) = (N-1)N^{-2}\mu_3.$$

В линейном приближении дисперсии оценок (7) имеют вид

$$\begin{aligned} D\hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{\varepsilon^4} \{ (1+2\varepsilon)^2 Da_1 + Dm_2 - 2(1+2\varepsilon)\text{cov}(m_2, a_1) \} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4 N} \{ \mu_4 - \mu_2^2 + \mu_2(1+2\varepsilon)^2 - 2(1+2\varepsilon)\mu_3 \} + O(N^{-2}), \end{aligned}$$

$$D\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{4\varepsilon^4 N} \{ \mu_4 - \mu_2^2 + \mu_2(1+\varepsilon)^2 - 2(1+\varepsilon)\mu_3 \} + O(N^{-2}),$$

Учитывая (3) и вычисляя  $\mu_3, \mu_4$  как [8]  $\mu_3 = \kappa_3, \mu_4 = \kappa_4 - 3\mu_2^2$ , где соотношения для семинвариантов  $\kappa_3$  и  $\kappa_4$  даны в [2], найдем

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \varepsilon(\lambda_1 + 2\lambda_2) + 3\varepsilon^2(\lambda_1 + 4\lambda_2) + \varepsilon^3(\lambda_1 + 8\lambda_2), \\ \mu_4 &= \varepsilon(\lambda_1 + 2\lambda_2) + 7\varepsilon^2(\lambda_1 + 4\lambda_2) + 6\varepsilon^3(\lambda_1 + 8\lambda_2) + \\ &+ \varepsilon^4(\lambda_1 + 16\lambda_2) + 3\{\varepsilon(1+\varepsilon)\lambda_1 + 2\varepsilon(1+2\varepsilon)\lambda_2\}^2. \end{aligned}$$

Далее, переходя к «физическим» параметрам  $\alpha = \lambda_1 + 2\lambda_2, \chi = \lambda_2/\alpha$ , характеризующим соответственно среднее число продуктов реакций и долю продуктов от реакции второго типа, получим

$$\begin{aligned} D\hat{\lambda}_1 &= N^{-1} \varepsilon^{-4} \{ \varepsilon^4 [2\alpha^2(1+2\chi)^2 + \alpha - 2\alpha\chi] + \\ &+ \varepsilon^3 [4\alpha^2(1+2\chi) + 8\alpha\chi] + \varepsilon^2 [2\alpha^2 + 2\alpha + 4\alpha\chi] \} + O(N^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\hat{\lambda}_2 &= N^{-1} \varepsilon^{-4} \{ \varepsilon^4 [\alpha^2(1+2\chi)^2/2 + \alpha\chi] + \varepsilon^3 [\alpha^2(1+2\chi) + \alpha/4 + \\ &+ 4\alpha\chi] + \varepsilon^2 [\alpha^2/2 + \alpha/2 + \alpha\chi] \} + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Отсюда рассчитываются среднеквадратичные ошибки  $\sqrt{D\hat{\lambda}_1}$ ,  $\sqrt{D\hat{\lambda}_2}$  и относительные погрешности  $\delta\hat{\lambda}_1 = \sqrt{D\hat{\lambda}_1}/\lambda_1, \delta\hat{\lambda}_2 = \sqrt{D\hat{\lambda}_2}/\lambda_2$ . Из вида относительных ошибок непосредственно следует их ограниченность снизу:

$$\sqrt{N} \delta\hat{\lambda}_1 > \sqrt{2}(1+\varepsilon)/\varepsilon \geq 2\sqrt{2}, \text{ при } \alpha \rightarrow \infty, \chi \rightarrow 0;$$

$$\sqrt{N} \delta\hat{\lambda}_2 > \sqrt{2}(1+2\varepsilon)/\varepsilon \geq 3\sqrt{2}, \text{ при } \alpha \rightarrow \infty, \chi \rightarrow 1/2.$$

5°. Авторы физических работ [4, 5] предложили упрощенные методы, со статистической точки зрения являющиеся модификациями метода моментов. Так, в [4] строятся частотности  $h_1$  и  $h_2$  регистрации 1 и 2 продуктов реакции за цикл измерения и на основе теоретического вида вероятностей  $p_1$  и  $p_2$  находятся оценки для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Перенесем этот метод «поактовой регистрации» на рассматриваемый случай наблюдения редких событий, используя  $p_0$  и  $p_1$ . Из (1) для  $k=2$  получаем

$$p_0 = \exp \{ \lambda_1 (e^{-\varepsilon} - 1) + \lambda_2 e^{-2\varepsilon} \},$$

$$p_1 = p_0 \varepsilon \{ \lambda_1 e^{-\varepsilon} + 2\lambda_2 e^{-2\varepsilon} \}.$$

Приравнявая выражения для  $p_0$  и  $p_1$  частотностям  $h_0$  и  $h_1$ , имеем линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 (e^{-\varepsilon} - 1) + \lambda_2 e^{-2\varepsilon} &= \ln h_0, \\ \lambda_1 \varepsilon e^{-\varepsilon} + 2\lambda_2 \varepsilon e^{-2\varepsilon} &= h_1/h_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) однозначно разрешимы при любых  $0 < \varepsilon < 1$ . Для больших  $N$  дисперсии оценок  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$  расписываются как

$$D\hat{\lambda}_v = \left( \frac{\partial \hat{\lambda}_v}{\partial h_0} \right)^2 Dh_0 + \left( \frac{\partial \hat{\lambda}_v}{\partial h_1} \right)^2 Dh_1 + 2 \operatorname{cov}(h_0, h_1) \frac{\partial \hat{\lambda}_v}{\partial h_0} \frac{\partial \hat{\lambda}_v}{\partial h_1},$$

$$v = 1, 2.$$

При этом следует воспользоваться тем, что частотности  $h_0, h_1$  распределены по биномиальному закону и [8]

$$Dh_0 = \frac{p_0(1-p_0)}{N}, \quad Dh_1 = \frac{p_1(1-p_1)}{N}, \quad \operatorname{cov}(h_0, h_1) = -\frac{p_0 p_1}{N}.$$

После несложных выкладок получаем

$$D\hat{\lambda}_1 = N^{-1} T^{-2} \{ p_0 B^2 + p_0^2 p_1 (e^{-2\varepsilon} - 1)^2 - (p_0 B - p_0 p_1 (e^{-2\varepsilon} - 1))^2 \},$$

$$D\hat{\lambda}_2 = N^{-1} T^{-2} \{ p_0 A^2 + p_0^2 p_1 (e^{-\varepsilon} - 1)^2 - (p_0 A - p_0 p_1 (e^{-\varepsilon} - 1))^2 \},$$

где

$$A = p_1 (e^{-\varepsilon} - 1) + p_0 \varepsilon e^{-\varepsilon}, \quad B = p_1 (e^{-2\varepsilon} - 1) + 2p_0 \varepsilon e^{-2\varepsilon},$$

$$T = p_0 (e^{-\varepsilon} - 1) B - p_0 (e^{-2\varepsilon} - 1) A.$$

Из этих дисперсий на ЭВМ были рассчитаны относительные ошибки оценивания  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  методом «поактовой регистрации» (см. п. 7°).

6°. В работе [5] предложен другой метод, связанный с частотностью  $h_0$  и выборочным средним  $a_1$ . По аналогии для исследуемой ф. в. (1) оценки  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  находятся из системы линейных уравнений

$$\lambda_1 (e^{-\varepsilon} - 1) + \lambda_2 (e^{-2\varepsilon} - 1) = \ln h_0, \quad (9)$$

$$\lambda_1 \varepsilon + 2\lambda_2 \varepsilon = a_1,$$

однозначно разрешимой при  $\varepsilon \neq 0$ .

Вычисляя в линеаризованном приближении дисперсии оценок  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$  как функции  $h_0, a_1$ , учитывая [8], что

$$Dh_0 = \frac{p_0(1-p_0)}{N}, \quad Da_1 = \frac{\mu_2}{N}, \quad \operatorname{cov}(a_1, h_0) = -\frac{p_0 \varepsilon}{N} (\lambda_1 + 2\lambda_2),$$

найдем

$$NC^2 D\hat{\lambda}_1 = 4p_0^{-1} - 4 + (e^{-2\varepsilon} - 1)^2 (\lambda_1 + 4\lambda_2) + 4(e^{-2\varepsilon} - 1)(\lambda_1 + 2\lambda_2) +$$

$$+ (e^{-2\varepsilon} - 1)^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) \varepsilon^{-1},$$

$$NC^2 D\hat{\lambda}_2 = p_0^{-1} - 1 + (e^{-\varepsilon} - 1)^2 (\lambda_1 + 4\lambda_2) + 2(e^{-\varepsilon} - 1) (\lambda_1 + 2\lambda_2) + (e^{-\varepsilon} - 1)^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) \varepsilon^{-1},$$

где  $C = (e^{-2\varepsilon} - 1) - 2(e^{-\varepsilon} - 1)$ .

Из общих свойств оценок метода моментов ясны состоятельность и асимптотическая несмещенность рассмотренных модификаций метода моментов.

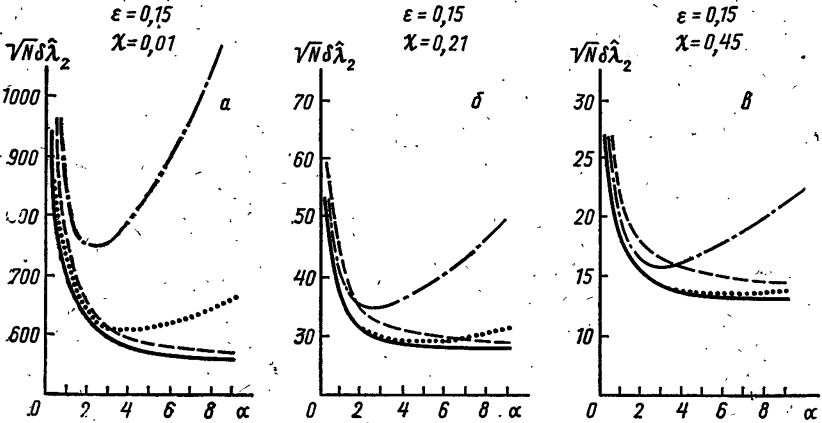


Рис. 1

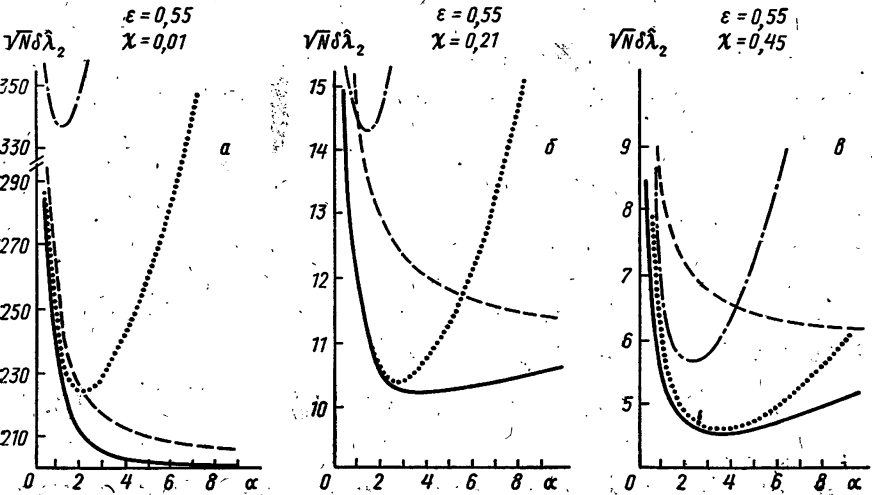


Рис. 2

7°. На рис. 1—3 представлены графики относительных ошибок оценивания параметра  $\lambda_2$  различными методами. Сплошная линия отвечает методу максимального правдоподобия (асимптотическое достижение нижней границы ошибки  $\delta\lambda_2$ ), штрихпунктирная — методу «поактовой регистрации», штриховая — методу моментов, а пунктирная — системе (9). Из рисунков видно, что метод моментов дает ошибки, близкие к нижней границе при больших  $\alpha$ .

Метод (9) является хорошим способом оценивания параметра  $\lambda_2$  при больших  $\chi$ , небольших  $\alpha$  и произвольных  $\varepsilon$  (см. рис. 1, в—3, в). Вместе с тем при малых  $\varepsilon$  и небольших  $\chi$  (см. рис. 1, а, б)

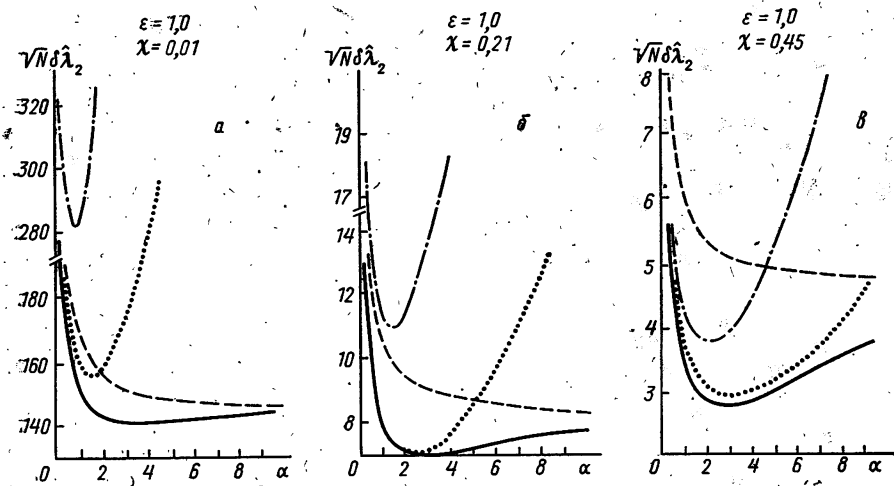


Рис. 3

кривые, отвечающие (9), имеют более размытый минимум с «дном» при небольших  $\alpha \approx 2,5 \div 5$ . Поэтому метод (9) можно применять также и при небольших  $\alpha$ ,  $\chi$  и малых  $\varepsilon$ . Кривые, отвечающие методу «поактовой регистрации», имеют форму узкого минимума при малых  $\alpha$  ( $\alpha \approx 2,0 \pm 0,5$ ) и не слишком малых  $\varepsilon$  (рис. 2, а, б, 3, а, б). С уменьшением  $\chi$  минимум смещается в сторону  $\alpha \approx 1,5 \div 2,0$ . При этих значениях  $\alpha$  метод «поактовой регистрации» дает хорошие оценки параметра  $\lambda_2$ . Однако в силу узости минимума штрихпунктирной кривой при не слишком малых  $\varepsilon$  использование этого метода представляется нерациональным.

Из сказанного выше наиболее рациональными в смысле простоты и эффективности являются следующие методы оценивания параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

- 1) при большом среднем числе продуктов реакций  $\alpha$  — метод моментов;
- 2) при небольших  $\alpha$  и при не слишком малой доле выхода продуктов от реакций второго типа  $\chi$  — метод, предложенный в [5] (см. (9));
- 3) в случае малой эффективности регистрации  $\varepsilon$  и малых  $\chi$

наиболее эффективным представляется использование метода моментов при любых значениях  $\alpha$ .

Оценки, найденные на основе этих моментов, можно также использовать в качестве нулевых приближений при решении м.п.-уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman I. On a new class of «contagious» distributions, applicable in entomology and bacteriology. — Ann. of Math. Statist., 1939, v. 10, N 1, p. 35—57.
2. Галкин В. Я., Уфимцев М. В. О предельном распределении при регистрации продуктов множественных реакций. — В кн.: Обработка и интерпретация результатов наблюдений. — М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 27—42.
3. Галкин В. Я., Уфимцев М. В. Распределение продуктов множественных реакций и «инфекционное» распределение Неймана. — Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика, 1982, № 2, с. 41—51.
4. Ashby V. I., Carlton H. C., Neukirk L. L., Taylor C. I. Absolute measurement of  $(n, 2n)$  cross sections at 14,1 MeV. — Phys. Rev., 1958, v. 111, N 2, p. 616—621.
5. Costa S. A method measure photoneutron multiplicity. — Nuclear Instrum. and Meth., 1963, v. 21, N 1, p. 129—135.
6. Батомункуева Г. В., Белов А. Г., Галкин В. Я., Уфимцев М. В. О рандомизированных распределениях в моделях регистрации продуктов множественных процессов. — В кн.: Вычислительная математика и математическое обеспечение ЭВМ. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
7. Белов А. Г., Галкин В. Я., Уфимцев М. В. О вычислении парь дискретных распределений, связанных с регистрацией редких событий. — В кн.: Математические задачи обработки экспериментов. — М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 99—110.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е изд-е. — М.: Мир, 1975.
9. Кендал М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
10. Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Изд-во МГУ, 1983.

*В. Я. Галкин, В. А. Ковригин, О. А. Матвеева,  
С. Ю. Плискин*

#### ОБ УСЛОВИЯХ ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТИ СПЕКТРОВ ПРИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ ОДНОГО КЛАССА

В работе [1] рассматривались вопросы автоматизации обработки экспериментальных реализаций сигналов для идентификации многоточечной модели отражения. Модели такого типа используются для описания процессов отражения от тел сложной формы (ТСФ) и позволяют при численном исследовании функционирования систем с достаточной точностью формировать отраженный сигнал на их входе. Эти модели учитывают экспериментально установленные закономерности отражения сигналов от ТСФ, состоящие в том, что в формировании отраженного сигнала

участвует лишь небольшое количество локальных участков ТСФ, а вклад остальных участков незначителен. При этом ТСФ представляется совокупностью конечного числа блестящих точек (БТ).

В [1] предложена методика автоматизированной обработки результатов экспериментов, основанная на использовании методов кратковременного спектрального анализа. На базе этой методики создана система автоматизированной обработки реализаций, предусматривающая выбор параметров временных фильтров в зависимости от условий проведения эксперимента. Однако при использовании разработанных алгоритмов возникают сложности интерпретации результатов обработки. Вопросы интерпретируемости спектров в широком диапазоне условий проведения эксперимента в [1] решаются в режиме диалога и требуют высокой квалификации исследователя.

Данная статья посвящена исследованию условий интерпретируемости и разработке формализованной процедуры учета этих условий в алгоритмах автоматизированной обработки. Для многоточечной модели отражения сигнал в точке приема представляется в виде суммы сигналов; отраженных от  $N$  различных БТ:

$$x(t) = \sum_{j=1}^N A_j(t, \bar{\theta}_j) B_j(t) e^{i\varphi_j(t, \bar{\theta}_j)} + n(t), \quad (1)$$

где  $\bar{\theta}_j$  — вектор, характеризующий положение  $j$ -й БТ на ТСФ;  $A_j(t, \bar{\theta}_j)$  — функция, описывающая свойства физического канала распространения сигнала и свойства приемной и передающей антенн;  $B_j(t)$  — амплитудная диаграмма обратного рассеяния (ДОР)  $j$ -й БТ;  $\varphi_j(t, \bar{\theta}_j)$  — набег фазы сигнала, отраженного от  $j$ -й БТ при его прохождении по физическому каналу;  $n(t)$  — аддитивная помеха, учитывающая внутренние шумы системы, мешающие отражения и излучения, а также отражения от участков ТСФ, вклад которых незначителен.

Задачей обработки реализаций является определение следующих характеристик модели отражения: числа БТ  $N$ , вектора  $\theta_j$  и амплитудной ДОР  $B_j$  для каждой БТ,  $j = \overline{1, N}$ . Метод оценки параметров модели отражения на ЭВМ, использованный в [1], основан на вычислении кратковременных спектров сигналов на интервале наблюдения длиной  $h$  [2]. При этом показано, что для малых интервалов наблюдения  $[t-h/2, t+h/2]$  отраженный сигнал (1) может быть аппроксимирован полигармонической функцией вида

$$\tilde{x}(t, \tau) = \sum_{j=1}^N A_j(t, \bar{\theta}_j) B_j(t) e^{i[\varphi_j(t, \bar{\theta}_j) + \varphi'_j(t, \bar{\theta}_j)\tau]}, \quad (2)$$

где  $\tau \in [t-h/2, t+h/2]$ ,  $h$  — параметр, характеризующий ширину временного окна (интервала аппроксимации).

В данной статье вопросы интерпретируемости рассматриваются для модели отражения, представляющей собой совокупность конечного числа БТ, расположенных на отрезке прямой (линейный



объект). Схема проведения эксперимента на установке физического моделирования иллюстрируется рис. 1. Объект  $[x_n, x_R]$  движется со скоростью  $V$  параллельно оси  $Ox$  и облучается плоской

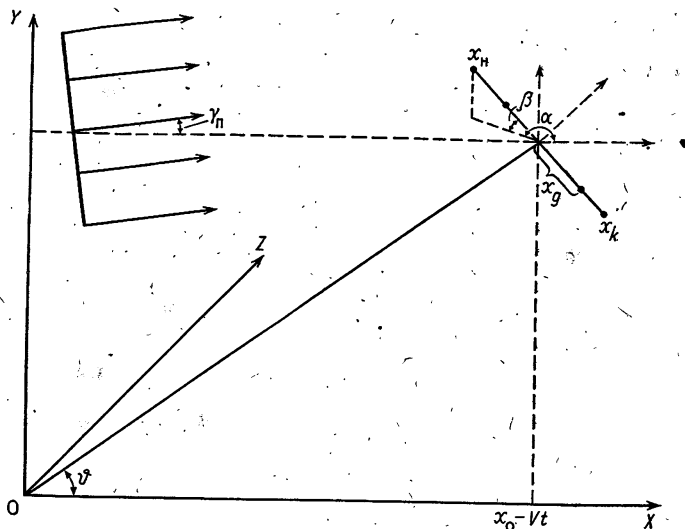


Рис. 1

волной. В этом случае фаза сигнала, отраженного от  $j$ -й БТ объекта, может быть представлена в виде

$$\varphi_j(t, \bar{\theta}_j) = \frac{2\pi}{\lambda} [V \cos \gamma_n + r_R(t_0, \bar{\theta}_j) - r_R(t, \bar{\theta}_j)], \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина волны зондирующего сигнала;  $\gamma_n$  — угол подсвета;  $t_0$  — начальный момент времени;  $r_R(t, \bar{\theta}_j)$  — расстояние от  $j$ -й БТ до точки приема.

Параметры модели отражения  $\bar{\theta}_j$ ,  $j = \overline{1, N}$  определяются по оценкам мгновенных частот  $\varphi_j'(t, \bar{\theta}_j)$ . Наличие локальных отражателей на объекте приводит к появлению пиков в спектре отраженного сигнала, соответствующего временному окну. Перемещение БТ при движении объекта по траектории вызывает изменение положения соответствующего пика в спектре. Положение пиков на частотной шкале определяет значение доплеровских частот соответствующих БТ в рассматриваемый момент времени. При известном законе движения, заданных ориентации и положений объекта на траектории можно для произвольного  $t$  установить связь между доплеровской частотой  $f(t)$  и положением соответствующей БТ на объекте  $x_g$ .

Интерпретация результатов спектрального анализа может быть затруднена из-за пространственной неоднозначности определения координат БТ по доплеровской частоте, погрешностей оценки частоты, связанных с шириной используемого временного окна,

а также из-за невозможности частотного разрешения соседних БТ при определенных условиях.

Пространственная неоднозначность определения координат БТ связана с тем, что при движении точечного отражателя (БТ) вдоль относительной траектории доплеровская частота отраженного сигнала зависит от угла визирования  $\theta$  (рис. 1):

$$f_g(t) = f_{gn} + \frac{V}{\lambda} \cos \theta(t), \quad (4)$$

где  $f_{gn} = V/\lambda \cos \gamma_n$  — доплеровская частота, обусловленная движением объекта относительно передатчика,  $\gamma_n$  — угол подсвета. Поэтому те БТ на объекте, которые в момент  $t$  попадают на коническую поверхность  $\theta(t) = \text{const}$ , имеют одинаковую доплеровскую частоту и неразличимы при спектральной обработке. Частотное разрешение двух БТ зависит от разности углов визирования этих точек и ширины временного окна  $h$ , используемого при спектральной обработке. Условие разрешимости определяется соотношением

$$|f_{g_1}(t) - f_{g_2}(t)| > c/h, \quad (5)$$

где  $f_{g_i}$  ( $i=1, 2$ ) — доплеровская частота соответствующей БТ;  $c$  — коэффициент, зависящий от типа используемого временного окна и соотношения интенсивностей БТ.

Ошибка смещения при оценке положения БТ связана с изменением доплеровской частоты в пределах временного окна. Из результатов численного анализа следует, что, начиная с некоторых величин  $h$ , положение главного максимума в спектре может существенно отличаться от оцениваемого значения доплеровской частоты  $f_g(t)$ . При этом наряду с частотными возникают и амплитудные искажения спектра. Величина максимально допустимого изменения оцениваемой частоты, при котором ошибка смещения не превышает заданный уровень, накладывает ограничение сверху на выбор ширины  $h$  временного окна:

$$f_g(t-h/2) - f_g(t+h/2) < k/h, \quad (6)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от условий проведения эксперимента и формы временного окна.

Расчеты показывают, что при ошибке оценки положения БТ на объекте, не превышающей углового расстояния в  $1^\circ$ , для окна прямоугольной формы и условий проведения эксперимента на установке физического моделирования коэффициент в (6) должен удовлетворять условию  $k \leq 2$ . Таким образом, при выборе ширины временного окна  $h$  необходимо учитывать ограничения сверху и снизу, задаваемые неравенствами (5) и (6). Эти условия противоречивы, так как при малых  $h$  невозможно разделить вклад различных БТ в отраженный сигнал, а при больших — появляется значительная ошибка смещения.

Разность доплеровских частот, входящих в (5) и (6), зависит от положения объекта на траектории, его ориентации относительно антенных систем и параметров временного окна. Поэтому авто-

матризованная методика должна предусматривать адаптивную обработку реализаций, т. е. выбор интервала аппроксимации  $h$ , оптимального в каждый момент  $t$  для заданных условий проведения эксперимента. Далее обосновываются условия интерпретируемости результатов спектральной обработки, позволяющие обеспечить выполнение сформулированных выше требований.

Доплеровская частота сигнала, отраженного от БТ с координатами в системе, связанной с объектом  $(x_g, 0, 0)$ , может быть представлена в виде

$$f(t, x_g) = f_{gn} + \frac{V}{\lambda} \frac{x_0 - Vt + x_g \cos \alpha \cos \beta}{((x_0 - Vt + x_g \cos \alpha \cos \beta)^2 + (y_0 + x_g \sin \alpha \cos \beta)^2 + (z_0 + x_g \sin \beta)^2)^{1/2}} \quad (7)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки подвеса объекта в момент  $t=0$  в относительной системе координат;  $\alpha, \beta$  — углы, характеризующие пространственную ориентацию объекта (см. рис. 1). Далее учитывается, что на установке физического моделирования  $z_0=0$ .

Достаточным условием однозначности определения координат БТ, произвольно расположенных на отрезке  $[x_n, x_k]$ , соответствующем длине объекта, по доплеровской частоте отраженного сигнала в момент  $t$  является монотонность  $f(t, x_g)$  как функции  $x_g$ . Обозначим область однозначного определения положения БТ на рассматриваемом отрезке через  $S$ . Для нахождения  $S$  в заданный момент  $t$  необходимо определить координату  $x_{g0}$ , соответствующую экстремуму функции и равную

$$x_{g0} = \frac{y_0 (y_0 \cos \alpha \cos \beta - (x_0 - Vt) \sin \alpha \cos \beta)}{y_0 \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - (x_0 - Vt) (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)}$$

Если  $x_{g0}$  не принадлежит отрезку  $[x_n, x_k]$ , то  $S = [x_n, x_k]$ , в противном случае  $S$  определяется из условий

$$S = \begin{cases} [x_n, x_{gp}] & \text{при } f_g(t, x_n) < f_g(t, x_k), \\ [x_{gp}, x_k] & \text{при } f_g(t, x_n) > f_g(t, x_k). \end{cases} \quad (a)$$

$$S = \begin{cases} [x_n, x_{gp}] & \text{при } f_g(t, x_n) < f_g(t, x_k), \\ [x_{gp}, x_k] & \text{при } f_g(t, x_n) > f_g(t, x_k). \end{cases} \quad (b)$$

В (a)  $x_{gp} \in [x_n, x_{g0}]$  и является корнем уравнения  $f(t, x_{gp}) = f(t, x_n)$ , а в (b)  $x_{gp} \in [x_{g0}, x_k]$  и является корнем  $f(t, x_{gp}) = f(t, x_k)$ .

Интерпретируемость результатов возможна при обеспечении частотного разрешения БТ, определяемого условием (5). Для алгоритмической проверки этого уровня при заданных условиях проведения эксперимента необходимо иметь априорную информацию о минимальном расстоянии  $d$  между БТ, определяющем степень детализации модели отражения. Выбор  $d$  производится с учетом конфигурации рассматриваемого объекта и опыта предыдущих исследований. При известных  $d$  и ширине временного окна  $h$  условие разрешимости (5) для двух произвольных БТ на объекте с координатами  $x_g$  и  $x_g + d$  может быть записано как

$$F_d(t, x_g) = |f(t, x_g) - f(t, x_g + d)| > c/h. \quad (8)$$

Аналитическое решение неравенства (8) невозможно, так как оно сводится к системе полиномиальных неравенств 6-8 степеней. Исследование функции  $F_d(t, x_g)$  показывает, что в зависимости от условий проведения эксперимента и ориентации объекта вся траектория может быть разбита на пять интервалов, в каждом из которых функция  $F_d$  либо монотонна, либо имеет один экстремум. Указанные особенности позволяют для решения (8) использовать быстро сходящиеся итерационные методы и при каждом  $t$  выделять на объекте область  $P(t, h)$  частотного разрешения БТ [2].

Необходимым условием интерпретируемости является также проверка выполнения ограничения (6) на величину ошибки смещения оценки координаты БТ при выбранных  $h$  и заданных условиях проведения эксперимента. Величина смещения зависит от положения БТ на объекте, определяемого координатой  $x_g$ , поэтому алгоритмически проверка условия (6) может быть сведена к решению неравенства

$$F_h(t, x_g) = f(t-h/2, x_g) - f(t+h/2, x_g) < k/h. \quad (9)$$

Как и в предыдущем случае, аналитическое решение (9) затруднено. Исследования характера функции  $F_h(t, x_g)$  показали, что в зависимости от ориентации объекта и условий проведения эксперимента  $F_h$  либо монотонна, либо имеет один экстремум. Поэтому для решения неравенства (9) можно использовать те же итерационные методы. Это позволяет при каждом  $t$  выделять на объекте область  $Q(t, h)$ , для которой ошибка смещения координаты БТ  $x_g \in Q(t, h)$  не превышает заданного уровня. В отличие от области частотного разрешения БТ  $P(t, h)$  область  $Q(t, h)$  может быть двусвязной.

Таким образом, при обработке реализации в произвольный момент времени на объекте можно выделить область  $R(t, h) = S(t) \cap Q(t, h) \cap P(t, h)$ . Эта область определяется в результате решения системы неравенств

$$x_g \in S(t), F_d(t, x_g) > c/h, F_h(t, x_g) < k/h. \quad (10)$$

При автоматизированной обработке реализации условия интерпретируемости (10) используются следующим образом. Для каждого  $t$  определяется положение пиков кратковременного спектра, превышающих некоторый пороговый уровень, и вычисляются соответствующие им координаты БТ:  $x_{gi}, i=1, m, m \leq N$ . Если  $x_{gi} \in R$ , то соответствующая БТ является интерпретируемой. Это означает, что рассматриваемому пику соответствует единственная БТ, а положение пика позволяет однозначно восстановить положение этой БТ на объекте с заданной точностью. Если  $x_{gi} \notin R$ , то соответствующий участок спектра не интерпретируем и не используется при оценке параметров модели отражения.

Методика автоматизированной обработки должна предусматривать адаптивный выбор ширины временного окна  $h$ : для каждого  $t$  значение  $h_{\text{опт}}$  выбирается так, чтобы получить максималь-

ный размер области интерпретируемости координат точек на объекте  $R$ . Из неравенства (9) можно оценить границы изменения параметра  $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$ :

$$h_{\min} = \frac{c}{\max_{x_g \in [x_n, x_k]} F_d(t, x_g)}, \quad h_{\max} = \frac{c}{\min_{x_g \in [x_n, x_k]} F_d(t, x_g)}, \quad (11)$$

а затем определить набор  $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$  для получения максимально возможной  $R(t)$ , где  $R(t) = UR(t, h)$ :

Описанный алгоритм позволяет выделить на траектории только те участки, на которых выполняются условия интерпретируемости. Для получения информации о модели отражения во всем диапазоне условий производится статистическая обработка оценок параметров модели, полученных по ряду реализаций.

Проиллюстрируем вышеизложенную методику на примере обработки сигнала от объекта, состоящего из пяти точек равной интенсивности, расположенных на расстоянии 0,5 друг от друга. Координата центральной точки  $B_3$   $x_3 = y_3 = 2$ , ракурс:  $\alpha = \beta = 0$ . Согласно (11) для рассматриваемых условий имеем  $h_{\min} = 120\Delta t$ ;  $h_{\max} = 550\Delta t$ , где  $\Delta t$  выбрано согласно теореме отсчетов для нестационарных процессов [3]. Рассмотрим решение (10) для различных  $h$ . При заданном ракурсе зоной однозначности является вся прямая. Области  $P(h)$  и  $Q(h)$  приведены в таблице, коэффициент  $c = 1,5$ .

Таблица

$h$	Зона разрешения $P(h)$	Зона смещения $Q(h)$	Зона интерпретации $R(h)$
150	$[-1, -0,6]$	$[-1, 1]$	$[-1, -0,5]$
250	$[-1, 0]$	$[-0,8, 1]$	$[-0,8, 0]$
350	$[-1, 0,4]$	$[-0,6, 1]$	$[-0,6, 0,4]$
450	$[-1, 0,7]$	$[-0,2, 1]$	$[-0,2, 0,7]$
550	$[-1, 1]$	$[-0,2, 1]$	$[0,2, 1]$

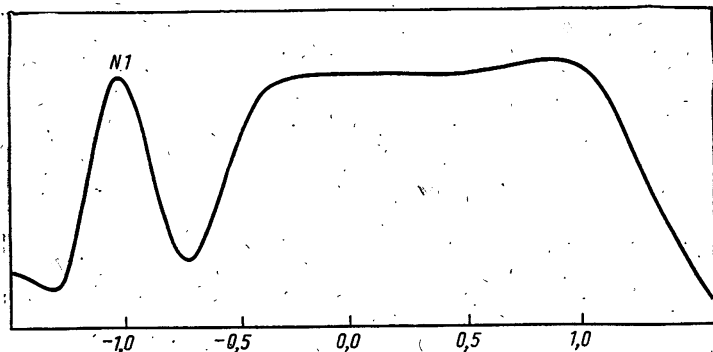


Рис. 2

Видно, что  $R(250) \subset R(150) \cup R(350)$ ,  $R(450) \subset R(350) \cup R(550)$ . Поэтому возможна последовательная обработка при  $h=150; 350; 550$ . Спектры, рассчитанные при соответствующих  $h$ , приведены на рис. 2—4. Вместо частот по оси  $x$  отложены линейные размеры по объекту, что возможно в силу однозначности спектра.

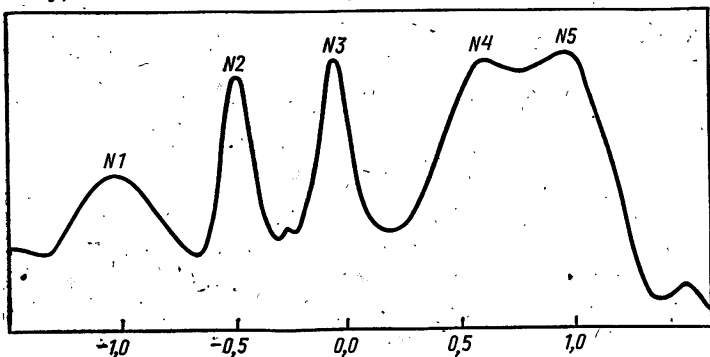


Рис. 3

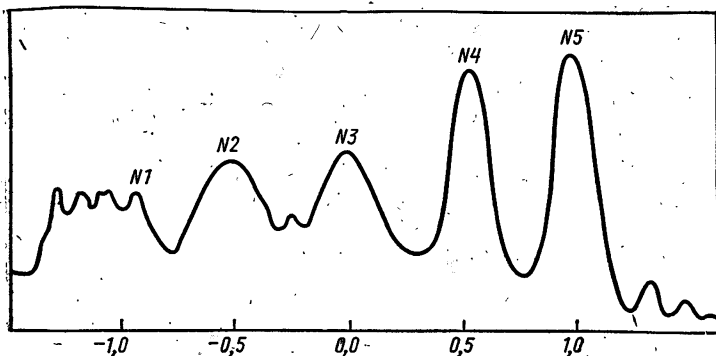


Рис. 4

При  $h=150$  возможно оценивание параметров точки № 1: Точки № 2—5 неразрешимы. При  $h=350$  определяются параметры № 2—3. По первой точке возможно определение геометрических характеристик, но сильны амплитудные искажения. Точки № 4—5 разрешаются плохо. При  $h=550$  определяются параметры № 4—5. По первой точке невозможно определение даже геометрических характеристик, в № 2—3 — сильны амплитудные искажения при сохранении геометрических характеристик.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизация обработки данных в задаче идентификации многоточечной модели отражения / Галкин В. Я., Ковригин В. А., Матвеева О. А., Плискин С. Ю. — В кн.: Математические задачи обработки эксперимента. — М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 200—216.

2. Пляскин С. Ю. Задача идентификации многоточечной модели отражения. — В кн.: Современные проблемы математического моделирования. — М.: Изд-во МГУ, 1983.

3. Джерри А. Теорема отсчетов Шеннона. — ТИИЭР, 1977, т. 65, № 11, с. 53—89.

*Е. А. Шеина*

## ИССЛЕДОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ РЕШЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Проводится численное исследование поведения решения уравнения мелкой воды, имеющих вид уединенных волн. Доказана единственность решения одномерного уравнения, описывающего форму вихря в зависимости от значения его скорости. Построены алгоритм численного нахождения этого решения и разностная схема, для которой выполняются сеточные аналоги законов сохранения, свойственных дифференциальным уравнениям; создана программа быстрого решения уравнения  $\Delta u - \lambda u = f(x, y)$  с периодическими условиями в прямоугольнике.

1°. Рассмотрим волны на поверхности несжимаемой мелкой жидкости, для которой характерная глубина много меньше длин волн на поверхности. Учтем силу Кориолиса  $-2\rho[\omega_0 v]$ , появляющуюся в системе вследствие вращения Земли. Здесь  $\omega_0$  — угловая скорость вращений,  $v$  — скорость движения жидкости. Движение такой среды описывается системой уравнений относительно  $u$  и давления  $p$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \\ g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \Delta v = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $l = \omega_0 \sin \alpha$ ,  $\alpha$  — географическая широта области.

Если ввести функцию  $h = (H - H_0)/H_0$ , выражающую относительную высоту слоя жидкости, то систему (1) можно свести к системе уравнений относительно  $h(x, y, t)$  и  $v(u, v, 0)$ . Петвиашвили [1] получил упрощенное уравнение для  $h(x, y, t)$  — крупномасштабного изменения высоты:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h - \Delta h) - \frac{\partial}{\partial x} \left( h + \frac{h^2}{2} \right) = \frac{D(h, \Delta h)}{D(y, x)}. \quad (2)$$

Рассматривается задача о нахождении решения уравнения (2) при  $(x, y) \in R^2$ , если  $h|_{t=0} = \varphi(x, y)$  и  $h \rightarrow 0$ , когда  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Уравнение (2) имеет решение в виде уединенного вихря, движущегося с постоянной скоростью вдоль оси  $OX$ :

$$h(x, y, t) = f((x-ut)^2 + y^2)^{1/2},$$

где  $f(r)$  — ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{u-1}{u} f - \frac{f^2}{2u}, \quad f \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Среди решений уравнения (2) особый интерес представляют такие, которые соответствуют начальной функции в виде суперпозиции нескольких вихрей, являющихся решениями уравнения (3) с различными скоростями  $u$ .

2°. Рассмотрим вопрос о решениях (3). Пусть  $u > 1$ . Используя работу [5], можно показать существование нетривиального решения уравнения (3). Эта задача эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} -\Delta f + af = bf^2, & x \in \Omega, \\ f(x) = 0, & x \in \Gamma, \\ a = \frac{u-1}{u} > 0, & b = \frac{1}{2u} > 0, \end{cases} \quad (4)$$

здесь  $\Omega$  — область в  $R^2$  с границей  $\Gamma$ .

Утверждение 1. Если  $f(x)$ ,  $x \in R^2$ , — непрерывное решение (4), то  $f \geq 0$ .

Утверждение 2. Если  $f_1, f_2$  — решения (4),  $f_1 \geq f_2$  на  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ,  $f_1 = f_2 = \varphi(s)$ ,  $s \in \Gamma_1$ , то  $f_1 = f_2$  на  $\Omega_1$ .

Доказательство. Пусть  $f_1, f_2$  — решения (4),  $f_1 \geq f_2$  на  $\Omega_1$ ,  $f_1 = f_2 = \varphi(s)$ ,  $s \in \Gamma_1$ . Тогда  $f_1, f_2$  — решения задачи

$$\begin{cases} -\Delta f + af = bf^2, & x \in \Omega_1, \\ f(s) = \varphi(s), & s \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Эта задача равносильна уравнению

$$f = Af, \quad (5)$$

где  $Af = \int_{\Omega_1} G(t, s) F(f, s) ds + g(t)$ ;  $G(t, s)$  — функция Грина оператора  $L = -\Delta + a$  в  $\Omega_1$ ;  $g(t)$  — решение задачи

$$\begin{cases} Lg = 0, & s \in \Omega_1 \\ g(s) = \varphi(s), & s \in \Gamma_1. \end{cases}$$

В силу принципа максимума  $g(s) \geq 0$ ,  $s \in \Omega_1$ , так как  $\varphi(s) \geq 0$ .

Для оператора  $A$  выполняются следующие свойства:

$$1) f_1 \geq f_2, f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \exists u_0(t) \in C(\Omega),$$

$$u_0(t) \geq 0 : Af_1 \geq Af_2 + \varepsilon u_0(t);$$

$$2) \forall f \neq 0 : f \geq 0 \Rightarrow Af \leq \alpha(t), u(t) \alpha(t) > 0.$$



Кроме того, для решений (4) справедливо:  $f = Bf$ , где  $Bf = \frac{1}{a}(\Delta f + bf^2)$ . Для оператора  $B$  выполняется свойство строгой выпуклости: если  $f \geq 0$ ,  $f \neq 0 \Rightarrow B(tf) < tBf$ ,  $0 < t < 1$ .

Итак, пусть  $f_1 \geq f_2$  на  $\Omega_1$ ,  $f_1 \neq f_2$ . Из свойства (1) имеем

$$Af_1 \geq Af_2 + \varepsilon u_0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \exists \Omega_2 \subset \Omega_1;$$

$$u_0(t) \geq \varepsilon_1 > 0 \Rightarrow Af_1 \geq Af_2 + \delta \quad \text{на } \Omega_2.$$

Из (2) следует, что  $\forall x \in \Omega_2: \delta \geq \delta f / \alpha(f)$ . Тогда  $f_2 = Af_2 \geq Af_1 + \delta \geq f_1(1 + \delta/\alpha(f_1))$ , т. е.  $f_1 < tf_2$  при некотором  $0 < t < 1$ . Поэтому

$$\exists t_0 = \inf \{t: tf_2(s) \geq f_1(s), s \in \Omega_2\}; \quad f_1 < tf_2, \quad 0 < t < t_0.$$

Отсюда

$$\exists s_0 \in \Omega_2: t_0 f_2(s_0) = f_1(s_0).$$

Но

$$f_1(s_0) = Bf_1 = B(t_0 f_2) < t_0 B(f_2) = t_0 f_2(s_0),$$

$$f_1(s_0) < t_0 f_2(s_0).$$

Полученное противоречие доказывает, что  $f_1 = f_2$  на  $\Omega_1$ .

**Теорема.** Нетривиальное неотрицательное решение уравнения (4) единственно.

Доказательство следует из утверждения 2, если рассмотреть

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i: f_1 < f_2 (f_1 \geq f_2), \quad x \in \Omega_i.$$

На рис. 1 представлен профиль уединенного решения при  $u > 1$ .

**Утверждение 3.** При  $0 < u < 1$   $\exists f \geq 0 (f < 0)$  решения (3):  $f$  монотонно  $\rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, решение (3) при  $0 < u < 1 \forall R > 0$  — знакопеременная функция при  $r > R$ .

**3°.** Численное решение уравнения (3) производится с помощью алгоритма, позволяющего среди всех решений выбрать нетривиальное:

$$r_i \frac{u-1}{u} f_i^{n-1} - \frac{1}{h^2} (r_{i+1/2} (f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) - r_{i-1/2} (f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1})) = \\ = \frac{1}{x^n} r_i \left( \frac{f_i^n}{2u} \right)^2,$$

$$x^n = h \left( \sum_i (f_i^n) r_i \right)^{1/2}, \quad r_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots$$

Решение уравнения (2) на сетке  $x_i = ih_1$ ,  $y_j = jh_2$ ,  $i = \overline{1, N_x}$ ,  $j = \overline{1, N_y}$  с периодическими граничными условиями находится как решение разностного уравнения. При построении разностной схе-

мы требовалось выполнение разностных аналогов законов сохранения, свойственных дифференциальному уравнению

$$I_1 = \iint_{\Omega} (h - \Delta h) dx dy = \text{const},$$

$$I_2 = \iint_{\Omega} (h^2 + (\nabla h)^2) dx dy = \text{const}.$$

Этим требованиям удовлетворяет следующая аппроксимация нелинейного оператора  $LX = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} + h \right)$ :  $LX_{ij} = (LX_{ij}^{(1)} + 2LX_{ij}^{(2)})/3$ , где  $LX^{(1)}$ ,  $LX^{(2)}$  — сеточные аналоги различных представлений  $LX = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} + h \right) = (h+1) \frac{\partial h}{\partial x}$  и аналогичная аппроксимация

$$\mathcal{D}\mathcal{J} = \frac{\mathcal{D}(\Delta h, h)}{\mathcal{D}(y, x)} [3]: \mathcal{D}\mathcal{J}_{ij} = \frac{1}{3} (\mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^{(1)} + \mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^{(2)} + \mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^{(3)}),$$

где  $\mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^{(k)}$  — сеточные приближения на девятиточечном шаблоне представлений;

$$\mathcal{D}\mathcal{J}(p, q) = p_x q_y - p_y q_x = (q \cdot p_x)_y - (q \cdot p_y)_x = (p \cdot q_y)_x - (p \cdot q_x)_y.$$

Для нахождения решения используется следующая схема второго порядка точности по  $\tau$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ :

$$(\Delta h - h)_{ij}^{n+1/2} = \frac{\tau}{2} (\mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^n + LX_{ij}^n) + (\Delta h - h)_{ij}^n, \quad (6)$$

$$(\Delta h - h)_{ij}^{n+1} = \tau (\mathcal{D}\mathcal{J}_{ij}^{n+1/2} + LX_{ij}^{n+1/2}) + (\Delta h - h)_{ij}^n.$$

4°. При реализации разностной схемы (6) возникает необходимость часто решать уравнение  $\Delta h - \lambda h = f(x, y)$  с периодическими граничными условиями. Аналогично работе [4] был разработан модифицированный марш-алгоритм решения этой задачи. Исходная задача заменяется разностной, которая равносильна системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} -Y_{j-1} + SY_j - Y_{j+1} = F_j, \\ Y_0 = Y_{N+1}, \quad j = 1, \dots, N; \end{cases}$$

$$T = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

$$F_j = h_2^2 (f(1, j), \dots, f(M, j)),$$

$$S = h_2^2 / h_1^2 T + (2 + \lambda h_2^2) E.$$

Проводится частичное исключение неизвестных и сведение исходной системы к редуцированной, связывающей  $2L$  векторов  $Y_1, Y_{2k}, Y_{2k+1}, Y_{4k}, \dots, Y_{2(k-1)k+1}, Y_N, N = 2kL$ . Остальные векторы

находятся по формулам обратного хода. Редуцированная система решается методом разложения решения по базису собственных векторов матрицы  $S$  с применением быстрого преобразования Фурье.

Созданная программа позволяет экономно использовать машинное время и память, так как на больших сетках она работает

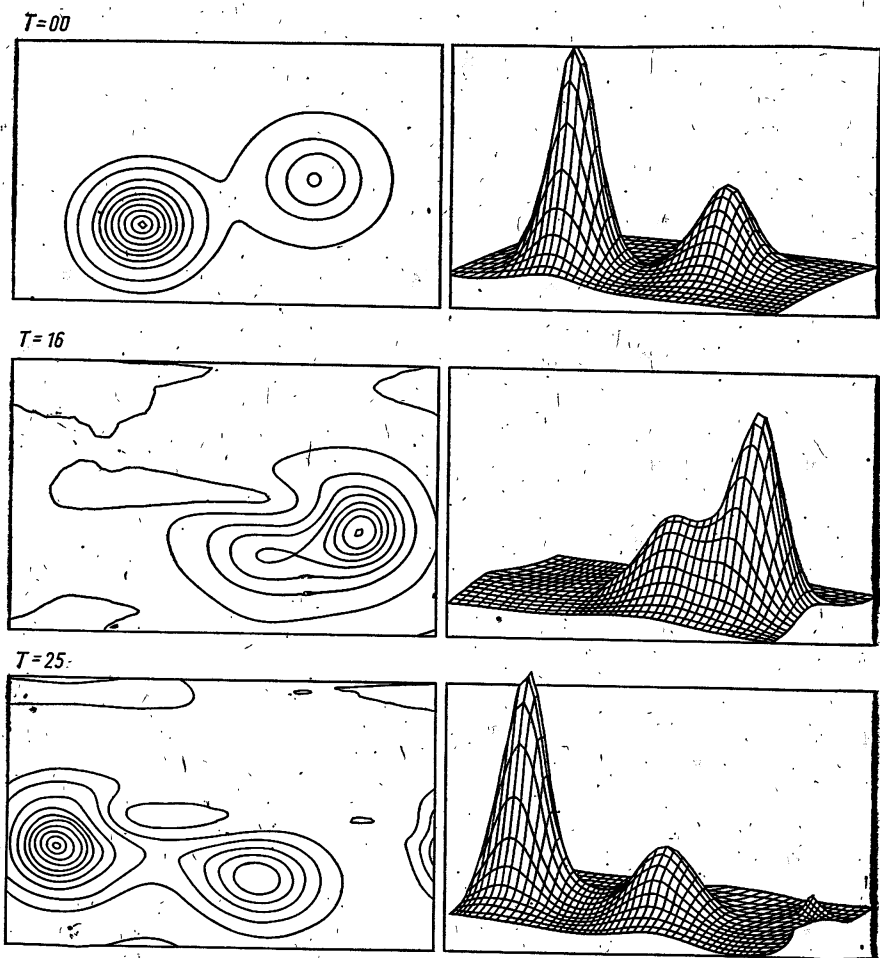


Рис. 2. Результат взаимодействия волн, движущихся параллельно со скоростями  $u_1=1,5$ ;  $u_2=2,2$ . Численное моделирование проводилось в прямоугольной области с требованием периодичности на границе

в семь раз быстрее ранее использовавшейся стандартной программы и требует только одного двумерного массива.

5°. Результаты численных расчетов показали устойчивость уединенных вихрей по отношению к малым возмущениям. При взаимодействии волн, движущихся с различными скоростями, происходит

сохранение их форм и скоростей, при этом появляется скачок фазы: более быстрый вихрь отбрасывается вперед, медленный — назад. При нелобовом столкновении, кроме того, может происходить обмен траекториями (рис. 2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петвиашвили В. И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме. — Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, № 11, с. 632—635.
2. Gurt Georg. On the convergence of an inverse iteration method for nonlinear elliptic eigenvalue problems. — Numer. Math., 1979, v. 32, N 1, p. 69—74.
3. Аракава Дж. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. — М.: Гидрометеоздат, 1977.
4. Капорин И. Е. Модифицированный марш-алгоритм решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. — В сб.: Разностные методы математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
5. Похожаев С. И. О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач. — Мат. сб., 1970, т. 82, № 2, с. 192—212.

*М. М. Хапаев, С. Г. Осипов*

## О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ—ЛИФШИЦА—ГИЛЬБЕРТА

1°. Исследования поведения намагниченности в магнитоупорядоченных средах всегда представляли большой теоретический интерес. Новый этап в этой области теоретической физики наступил в связи с открытием цилиндрических магнитных доменов (ЦМД). ЦМД представляют собой малые цилиндрические объемы в ферромагнитной пленке, в которых намагниченность направлена противоположно намагниченности в пленке. В работе Бобека [1] было показано, что подвижные магнитные домены обладают большими потенциальными возможностями для создания на их основе систем памяти в устройствах хранения и обработки информации, в том числе в устройствах памяти для нового поколения ЭВМ. Принцип работы ЦМД-устройств заключается в том, что ЦМД можно легко продвигать в любом направлении по пленке, в которой они содержатся, с помощью управляющих магнитных полей.

Для исследования доменных структур в ферромагнетиках удобную математическую модель представляет теория микромагнетизма [2]. Микромагнетизм — это классическая феноменологическая макроскопическая (несмотря на название) теория. Она не ставит своей целью объяснение природы спонтанной намагниченности, магнитной анизотропии и других эффектов, присущих магнитоупорядоченным веществам. Такое объяснение можно дать только на квантовомеханическом уровне. В теории микромагнетизма эти эффекты постулируются и учитываются соответствующим образом записанными выражениями для свободной энергии.

Эта теория ставит своей задачей найти, исходя только из выражения свободной энергии и общих уравнений равновесия и движения намагниченности, действительную зависимость намагниченности от координат и времени.

2°. Динамическое уравнение для намагниченности впервые было получено в работе Ландау и Лифшица [3] и позднее модифицировано Гильбертом [4]. Рассмотрим это уравнение в форме Ландау — Лифшица, выбрав для определенности случай одноосной анизотропии. Пусть в области  $\Omega \subset R^3$  с границей  $\partial\Omega$ , удовлетворяющей условию Лифшица, определена вектор-функция намагниченности  $\mathbf{v}(x, t)$ . Тогда движение намагниченности осуществляется в силу уравнения (1) с начальным условием (3):

$$(1 + \alpha^2) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{h} \times \mathbf{v} - \alpha (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h})), \quad (1)$$

$$\mathbf{h} = \frac{\pi}{Q} [(\tilde{\nabla}^2 v_1) + (\tilde{\nabla}^2 v_2) + (\tilde{\nabla}^2 v_3)] - 4\pi Q \mathbf{v}_\perp + \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad (3)$$

где  $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$  — векторное произведение  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}$ ;  $\tilde{\nabla} = l \nabla$ ;  $l = (AK)^{1/2} \pi / M_S^2$  — характеристическая единица длины;  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $A$  — константа обмена;  $K$  — константа одноосной анизотропии;  $M_S$  — намагниченность насыщения;  $Q = K/2\pi M_S^2$  — фактор качества материала;  $\mathbf{v}_\perp$  — составляющая вектора  $\mathbf{v}$ , перпендикулярная оси анизотропии;  $\mathbf{h}_0$  — внешнее магнитное поле;  $\mathbf{h}_m$  — размагничивающее поле, обусловленное намагниченностью  $\mathbf{v}$ , которое имеет вид

$$\mathbf{h}_m(x) = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dx' + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds' \quad (4)$$

( $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль,  $\mathbf{r}$  — расстояние между точками  $x$  и  $x'$ ).

Основными математическими трудностями, возникающими при решении этого уравнения, являются сильная нелинейность и наличие нелокального самосогласованного размагничивающего поля.

3°. В основе предлагаемого численного метода лежит уравнение движения намагниченности в слабой форме. Введем обозначения:  $\mathbf{L}_t = \mathbf{h} \times \mathbf{v}$  — вектор вращательного момента;  $\mathbf{L}_d = -(\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}))$  — вектор диссипативного момента. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$(1 + \alpha^2) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{L}_t - \alpha \mathbf{L}_d.$$

Будем считать, что  $\mathbf{h}_0 \in L_2(\Omega)$ . Назовем обобщенным решением задачи (1) — (3) функцию  $\mathbf{v}(x, t)$ , которая почти для всех  $t \in (0, T)$  принадлежит  $H^1(\Omega)$ , обладает производной  $(d\mathbf{v}/dt) \in L_2(\Omega \times (0, T))$  и удовлетворяет почти всюду на  $(0, T)$  соотношениям

$$(1 + \alpha^2) \left( \frac{dv_i}{dt}, w \right) = (L_{ii}, w) - \alpha (L_{di}, w), \quad (5)$$

$$(v_i(x, 0), w) = (v_{0i}(x), w), \quad (6)$$

где  $v_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — компоненты вектора  $v$ ;  $w$  — произвольная функция из пространства  $H^1(\Omega)$ ;  $(v, w)$  — скалярное произведение пространства  $L_2(\Omega)$ ;  $H^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$  — гильбертовы пространства вектор-функций со скалярными произведениями

$$(v, w)_{H^1} = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^3 (\nabla v_i \cdot \nabla w_i) + v \cdot w \right) dx,$$

$$(v, w)_{L_2} = \int_{\Omega} v(x) \cdot w(x) dx.$$

Это определение корректно, так как оператор, определенный формулой (4), действует из  $H^1(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ .

При такой обобщенной формулировке разностную схему можно построить следующим образом: к пространственным переменным применим проекционный метод Галеркина, а приближение по времени осуществим разностным методом.

Для аппроксимации по  $x_1, x_2, x_3$  будем использовать пространства конечных элементов  $X_h$ . Нетрудно убедиться в том, что выражение  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \text{const}$  является интегралом уравнения (1). Кроме того, это условие имеет физический смысл: экспериментально установлено, что вдали от точки Кюри в однородном образце при не очень сильных внешних полях величина  $|v|$  не зависит от пространственных координат и при данной температуре является постоянной. Мы предлагаем для аппроксимации этого условия воспользоваться соотношением

$$Pv = v_h = \sum_{i=1}^N \varphi_i(v) p_i, \quad |v| = 1, \quad v \in H^1(\Omega),$$

где  $\varphi_i$  — линейные функционалы, имеющие вид

$$v \rightarrow v(a_i),$$

$$v \rightarrow D_p v(a_i) \xi_{ik},$$

$$v \rightarrow D_p^2 v(a_i^2) \xi_{ik}^l,$$

$a_i^r$  ( $r=1, 2, \dots$ ) — узлы, принадлежащие конечному элементу;  $\xi_{ik}^l$  — векторы, построенные на основе геометрии конечного элемента;  $p_i$  — базисные функции;  $Pv = P$  — интерполант функции  $v$  (здесь мы пользуемся терминологией работы [5]).

4°. Рассмотрим метод более подробно на примере задачи о динамике двумерной доменной стенки в тонкой ферромагнитной пленке. Доменной стенкой называют область, в которой вектор намагниченности осуществляет переход от направления в одном

домене к направлению в другом. Областью вычислений является прямоугольник  $\Omega \subset R^2$ ,  $\Omega = S \times D$ , в котором производится регулярная триангуляция: вначале покрываем область прямоугольной сеткой и получившиеся в результате разбиения прямоугольнички делим диагональю пополам. Система координат имеет начало в центре прямоугольника, ось  $x_1$  направлена перпендикулярно доменной стенке (размер  $S$ ), ось  $x_3$  направлена перпендикулярно плоскости пленки (размер  $D$ ). Ось  $x_2$  направлена вдоль стенки таким образом, чтобы  $x_1, x_2, x_3$  образовали правую систему координат. Граничные условия

$$v(a_i)|_{x=\pm S/2} = \pm i_3$$

моделируют тот факт, что слева и справа к стенке примыкают соседние домены (т. е. области с намагниченностью, близкой к постоянной). Функцию  $v$  аппроксимируем кусочно-линейными функциями (в качестве конечного элемента используем треугольник Куранта [5]). Приближенное решение будем искать в виде

$$v_h(x, t) = \sum_{i=1}^N v_i(t) p_i(x), \quad (7)$$

где  $p_i(x)$  — кусочно-линейные базисные функции, принимающие значения: 1 — в узле  $a_i$  и 0 — во всех остальных;  $N$  — число узлов. Коэффициенты  $v_i(t)$  определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно получить следующим образом: подставим приближенное решение (7) в уравнения (5) — (6) и вместо произвольной функции  $\omega \in H^1(\Omega)$  возьмем базисную функцию  $p_i(x)$ . Получим  $N$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $v_i(t)$ , которые будем решать методом «замороженных коэффициентов»; т. е. имея некоторое распределение  $v_h^n$ , вычислим коэффициенты системы дифференциальных уравнений, зафиксируем их, проинтегрируем систему на интервале времени  $\Delta t$ , получим  $v_h^{n+1}$  и так далее.

Интегрируя по частям уравнение движения в слабой форме (5), можно понизить порядок производных, входящих в выражения для коэффициентов, в частности перейти от эффективного размагничивающего поля  $h_m$  к потенциалу  $U$  ( $h_m = -\nabla U$ ), который имеет вид

$$U(x) = -2 \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) dx' + 2 \int_{\partial\Omega} (v \cdot n) \ln \left( \frac{1}{\rho} \right) ds', \quad (8)$$

где  $\rho^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_3 - x_3')^2$ .

Для экономичного вычисления объемного потенциала целесообразно воспользоваться следующим приемом (см., например, [6]): произведем редукцию к двум краевым задачам Дирихле со специальными граничными условиями:

$$\begin{cases} \Delta V = 2\pi\sigma, & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_1 = 2\pi\sigma, & x \in \Omega, \\ U_1(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial V}{\partial n} G(x, y) dy, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

где  $\sigma = 2(\nabla \cdot v)$ ,  $G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$ .

Аналогичным образом ставится задача Дирихле для потенциала простого слоя. Используя стандартную аппроксимацию конечными разностями [7], приближенное решение задачи Дирихле можно свести к решению трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений. Одним из наиболее быстрых и экономичных методов решения таких систем является модификация маршалгоритма [8]. Вычисление потенциала (8) с помощью этого алгоритма потребует  $O(N \times M)$  арифметических операций ( $N, M$  — параметры триангуляции,  $N \times M$  — число узлов).

Данный метод имеет следующие преимущества по сравнению с методами, применявшимися в работах [9—12] для численного интегрирования уравнения Ландау — Лифшица — Гильберта: 1) асимптотика арифметических операций  $O(N \times M)$  вместо  $O((N \times M)^2)$ ; 2) для аппроксимации  $v$  применяются кусочно-линейные функции вместо кусочно-постоянных; 3) интегрированием по частям понижается порядок производных в уравнении (5); 4) метод является конформным в том смысле, что  $X_h \in H^1(\Omega)$  и в дискретной задаче используются формы, тождественные формам исходной задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Vobeck A. Properties and device applications of magnetic domains in orthoferrites. — Bell System Techn. J., 1967, v. 46, p. 1901—1925.
2. Браун У. Ф. Микромагнетизм. — М.: Наука, 1979.
3. Landau L., Lifshitz E. On the theory of dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. — Phys. Zs. der SU, 1935, Bd. 8, S. 153—169.
4. Gilbert T. L., Kelly J. K. — Proc. of the Pitts. Conf. on MMM. — Pittsburgh, Pa, 1955, p. 253.
5. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
6. Вабищевич П. Н., Пулатов П. А. Экономичные разностные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1983, № 10, с. 68—76.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
8. Капорин И. Е. Модифицированный маршалгоритм решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. — В кн.: Разностные методы математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 11—21.
9. Shir C. C. Computations of the micromagnetic dynamics in domain walls. — J. Appl. Phys., 1978, v. 49, N 6, p. 3413—3421.
10. Shir C. C., Henry G. R. Dynamics of micromagnetic structure under applied in-plane magnetic fields. — J. Appl. Phys., 1979, v. 50, N 3, p. 2192—2194.
11. Blake T. G. W., Della Torre E. Micromagnetic analysis of S-1 magnetic bubbles with curvature effects. — J. Appl. Phys., 1979, v. 50, N 3, p. 2192—2194.
12. Антонов Л. И., Осипов С. Г., Хапаев М. М. Расчет доменной стенки методом установления. — ФММ, т. 55, вып. 5, с. 917—922.



# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГЕОФИЗИКИ

*А. С. Барашков, В. И. Дмитриев*

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В КЛАССЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель электромагнитного зондирования Земли состоит в восстановлении распределения электропроводности внутри Земли по измеренным на поверхности Земли электромагнитным полям. Одним из методов электромагнитного зондирования является магнитотеллурическое зондирование, когда падающее на Землю первичное поле можно считать плоской электромагнитной волной. Постановка задачи магнитотеллурического зондирования дана в [1], теорема единственности для одномерной модели доказана в [2]. Методы решения одномерной обратной задачи достаточно разработаны [3, 4], результаты для этой задачи продолжают постоянно улучшаться и уточняться [5, 6] и широко используются при интерпретации данных магнитотеллурического зондирования.

В настоящей работе рассмотрено решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерной среды. Разработанные методы решения основаны на том предположении, что распределение электропроводности представимо в виде суммы плавно меняющейся компоненты и небольшой по величине добавки [7—9]. Такая модель позволяет ввести в уравнения задачи малые параметры и использовать их для построения последовательности функций, аппроксимирующей решение обратной задачи.

Переходим к изложению соответствующих результатов.

### § 1. Квазиодномерные структуры и их восстановление

Начнем с постановки задачи магнитотеллурического зондирования в одномерном случае [2]. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i\omega\sigma(z)u = 0, \quad (1)$$

$$u|_{z=0} = 1, \quad u|_{z=\infty} = 0.$$

Прямая задача заключается в нахождении функции

$$\psi(\omega) = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2)$$

где  $\omega$  пробегает некоторый отрезок  $0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .

Обратная задача заключается в определении коэффициента  $\sigma(z)$  в уравнении (1) по функции  $\psi(\omega)$  из (2). Функция  $\psi(\omega)$  с точностью до множителя представляет собой так называемый адмитанс, который измеряется в эксперименте. Как уже отмечалось, сформулированная одномерная обратная задача достаточно изучена.

Самое простое многомерное обобщение уравнения (1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i\omega\sigma(x, z)u = 0. \quad (3)$$

Это уравнение описывает так называемый случай *E*-поляризации в двумерной среде [10]. Исходной информацией для определения коэффициента  $\sigma(x, z)$  можно считать функции

$$\varphi(x, \omega) = u(x, z, \omega)|_{z=0}; \quad \psi(x, \omega) = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (4)$$

Их можно интерпретировать как измеренные на поверхности Земли электрическое и магнитное поля. В реальных экспериментах, правда, измеряются не указанные поля, а так называемый тензор импеданса. С помощью решения некоторой вспомогательной задачи по тензору импеданса можно восстановить функции (4). На деталях этого восстановления мы в этой статье останавливаться не будем, а сразу примем, что нам известны функции (4).

Уравнение (1) описывает поля в слоистой среде. Теперь представим, что эти слои немного «искривлены» (рис. 1). Если рас-

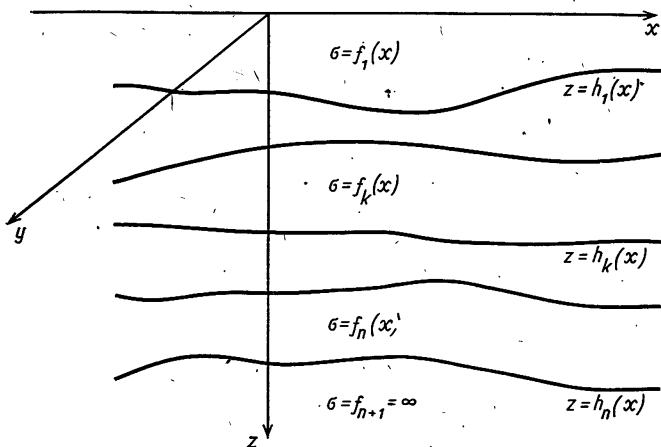


Рис. 1. Квазиодномерное распределение электропроводности

шифровать слово «немного», то это означает, что производные по  $x$  всех функций, характеризующих среду, много меньше, чем сами эти функции. Например, для функции  $h_1(x)$ , характеризующей границу первого слоя, это означает:

$$|h_1^{(k)}(x)| \ll h_1(x), \quad k=1, 2, \dots$$

В этой ситуации можно «сжать» по оси  $x$  всю картину с тем, чтобы производные стали одной величины с самими функциями. Это означает, что мы вводим малый параметр  $\varepsilon$  и новую переменную  $x_1 = \sqrt{\varepsilon} x$ . В переменных  $x_1, z$  уравнение (3) запишется в виде

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i\omega \sigma_1(x_1, z) u = 0. \quad (5)$$

Мы ввели здесь обозначение  $\sigma_1(x_1, z) = \sigma(x, z)$ , где функция  $\sigma_1(x_1, z)$  уже не квазиодномерная, а обычная функция, у которой производные по  $x_1$  того же порядка, что и сама функция. Взамен мы получили малый параметр  $\varepsilon$  перед производной по  $x_1$ . Для сокращения записей в дальнейшем будем писать  $x$  вместо  $x_1$  и  $\sigma$  — вместо  $\sigma_1$ . Тогда вместо (5) получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i\omega \sigma(x, z) u = 0, \quad (6)$$

которое и будем исследовать.

Отметим, что при  $\varepsilon=0$  из (6) получается уравнение (1), а при  $\varepsilon=1$  — уравнение (3). Дальнейшие наши действия очевидны: раз появился малый параметр, то по нему можно разложить интересные нас функции. Для обратной задачи из этих разложений вытекает следующее: удастся построить последовательность  $\sigma_\varepsilon(x, z, \varepsilon)$ , асимптотически сходящуюся к коэффициенту  $\sigma(x, z)$ . Опишем подробно один достаточно общий результат такого типа.

Пусть функция  $\sigma(x, z)$  — кусочно-гладкая функция, причем границы раздела слоев — бесконечно дифференцируемые функции (см. рис. 1). Внутри каждого слоя коэффициент  $\sigma(x, z)$  есть бесконечно дифференцируемая функция одной переменной  $x$ . Пусть проводимость последнего слоя, простирающегося до  $z=\infty$ , равна бесконечности. Последнее ограничение индуцирует граничное условие  $u|_{z=h_k(x)} = \infty$ . Для уравнения (6) ставим следующую задачу:

$$u|_{z=0} = \varphi(x, \omega), \quad u|_{z=h_n(x)} = 0, \quad (7)$$

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0.$$

Прямая задача для уравнения (6) при условиях (7) состоит в нахождении функции

$$\psi(x, \omega, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (8)$$

Обратная задача заключается в определении коэффициента  $\sigma(x, z)$  в (6) по функции  $\psi$  из (8).

При построении алгоритма решения обратной задачи для (6) существенно используется решение одномерной обратной задачи, зависящей от параметра  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i\omega\beta(x, z, \varepsilon)u = 0 \quad (9)$$

с граничными условиями и условиями сопряжения, аналогичными (7). Оператор, ставящий в соответствие функциям  $\varphi$  и  $\psi$  из (7), (8) квазирешение  $\beta(x, z, \varepsilon)$  из (9), состоит из следующих действий. Пусть относительно решения обратной задачи известна следующая априорная информация: параметры, характеризующие среду, заключены в следующих пределах:

$$A_k \leq h_k \leq B_k, \quad C_k \leq f_k \leq D_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где  $A_k, B_k, C_k, D_k$  — некоторые константы.

При каждом  $x$  найдем квазирешение одномерной обратной задачи, минимизируя функционал невязки на компакте (10), который мы обозначим буквой  $T$ . Если еще обозначить оператор решения одномерной прямой задачи буквой  $K$ :

$$K(\beta(x, z)) = r(x, \omega),$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i\omega\beta(x, z)v &= 0, \\ v|_{z=0} &= \varphi(x, \omega), \quad v|_{z=h_n(x)} = 0, \\ [v] &= 0, \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] = 0, \\ r(x, \omega) &= \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

то квазирешение определяется по формуле

$$\begin{aligned} \sigma(x, z, \varepsilon) &: \int_{\Lambda} \rho(\omega) |K(\sigma) - \psi(x, \omega, \varepsilon)|^2 d\omega = \\ &= \min_{\beta \in T} \int_{\Lambda} \rho(\omega) |K(\beta) - \psi|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

В формуле (11)  $\rho(\omega)$  — некоторая положительная функция (в простейшем случае константа);  $\Lambda$  — отрезок, на котором заданы функции  $\psi(x, \omega, \varepsilon)$ ,  $\varphi(x, \omega, \varepsilon)$ ;  $T$  — компакт, определяемый неравенствами (10).

Даже если функции  $\varphi$  и  $\psi$  являются гладкими, квазирешение  $\sigma(x, z, \varepsilon)$  будет непрерывной, но, вообще говоря, недифференцируемой функцией (в том смысле, что функции  $h_k, f_k$ , задающие коэффициент  $\sigma$ , не будут гладкими).

Для дальнейшего нам потребуется, чтобы квазирешение было гладкой функцией. Поэтому полученное по формуле (11) квази-решение  $\sigma(x, z, \varepsilon)$  мы сгладим специальным образом. Введем в рассмотрение невязку

$$\gamma(x) = \int_{\Lambda} \rho(\omega) |K(\sigma) - \psi|^2 d\omega.$$

Функция  $\gamma(x)$  — непрерывная, но, вообще говоря, недифференцируемая функция. Построим гладкую функцию  $\gamma_1(x)$ , мажорирующую функцию  $\gamma(x)$ :

$$\gamma_1(x) : \gamma_1'(x) \geq \gamma(x);$$

$$\frac{\partial^k \gamma_1(x)}{\partial x^k} = O(\gamma(x)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Простейший пример такой функции дается формулой

$$\gamma_1(x) = \gamma_1 = \sup_{-\infty < x < \infty} \gamma(x).$$

Теперь построим гладкое квазирешение методом регуляризации Тихонова [11]. Регуляризирующий функционал выберем таким:

$$M(\sigma, \psi, \alpha) = \int_{\Lambda} \rho |K(\sigma) - \psi|^2 d\omega + \alpha \sum_{k=1}^n \left\{ \left( h_k - \frac{A_k + B_k}{2} \right)^2 + \left( \sigma_k - \frac{C_k + D_k}{2} \right)^2 \right\}. \quad (12)$$

Регуляризованное решение найдем минимизацией функционала (12) на компакте (10), выбирая параметр регуляризации по невязке  $\gamma_1(x)$ . Оператор, переводящий функции  $\psi(x, \omega, \varepsilon)$  в сглаженные квазирешения  $\sigma(x, z, \varepsilon)$ , определяемые формулами (11), (12), обозначим буквой  $\Phi$  ( $\Phi$  — оператор, квазиобратный оператору решения прямой задачи  $K$ ):

$$\Phi(\psi(x, \omega, \varepsilon)) = \sigma(x, z, \varepsilon). \quad (13)$$

С помощью оператора  $\Phi$  можно описать алгоритм построения асимптотически сходящейся последовательности  $\sigma_k$ . Итак, пусть функция  $\psi(x, \omega, \varepsilon)$  из (8) является решением прямой задачи для функции  $\sigma(x, z)$  из уравнения (6) при условии (7). Нулевое приближение  $\sigma_0(x, z, \varepsilon)$  определим по формуле

$$\sigma_0(x, z, \varepsilon) = \Phi(\psi(x, \omega, \varepsilon)). \quad (14)$$

Остальные приближения определяются так. Пусть известно уже  $k$ -е приближение:  $\sigma_k(x, z, \varepsilon)$ . Следующее,  $(k+1)$ -е, приближение получается по таким формулам. Находим решение прямой задачи для коэффициента  $\sigma_k(x, z, \varepsilon)$ , который характеризуется функциями  $H_{km}(x, \varepsilon)$ ,  $F_{km}(x, \varepsilon)$ , аналогичными функциям  $h_m(x)$ ,  $f_m(x)$  для  $\sigma(x, z)$ ,

$$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i\omega \sigma_k(x, z, \varepsilon) v = 0,$$

$$v|_{z=0} = \varphi(x, \omega); \quad v|_{z=H_{kn}(x, \varepsilon)} = 0,$$

$$[v] = 0, \quad \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] = 0.$$

Решение прямой задачи обозначим буквой  $\mu$ :

$$\mu(x, \omega, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Затем для функции  $\sigma_k$  находим решение одномерной прямой задачи, зависящей от параметра  $x$ :

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + i\omega \sigma_k(x, z, \varepsilon) \omega = 0,$$

$$\omega|_{z=0} = \varphi(x, \omega), \quad \omega|_{z=H_{kn}(x, \varepsilon)} = 0,$$

$$[\omega] = 0, \quad \left[ \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] = 0.$$

Решение прямой одномерной задачи, зависящей от параметра  $x$ , обозначим буквой  $\eta$ :

$$\eta(x, \omega, \varepsilon) = \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

С помощью функций  $\mu$  и  $\eta$  строится  $(k+1)$ -е приближение по формуле

$$\sigma_{k+1}(x, z, \varepsilon) = \Phi(\psi + \eta - \mu). \quad (15)$$

**Теорема [7, 8].** Пусть функция  $\psi(x, \omega, \varepsilon)$  из (8) является решением прямой задачи для функции  $\sigma(x, z)$  из (6) при условиях (7). Предположим, что функция  $\varphi(x, \omega)$  бесконечно дифференцируема и ограничена вместе со всеми своими производными. Относительно коэффициента  $\sigma(x, z)$  предполагаем, что функции  $f_k(x)$ ,  $h_k(x)$ , задающие этот коэффициент, бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам (10). Функции  $h_k(x)$ , кроме этого, удовлетворяют неравенствам

$$0 < h_1(x) < h_2(x) < \dots < h_n(x).$$

Предполагается также, что все производные функций  $h_k(x)$ ,  $f_k(x)$  ограничены на всей оси.

Тогда последовательность  $\sigma_k$ , построенная по формулам (14), (15), асимптотически сходится к функции  $\sigma(x, z)$ . Под этим подразумевается, что функции  $h_m(x)$ ,  $f_m(x)$ , задающие  $\sigma(x, z)$ , и функции  $H_{km}(x, \varepsilon)$ ,  $F_{km}(x, \varepsilon)$ , задающие  $\sigma_k(x, z, \varepsilon)$ , связаны соотношениями

$$h_m - H_{km} = O(\varepsilon^{k+1}), \quad f_m - F_{km} = O(\varepsilon^{k+1}).$$

Приведем численный пример, иллюстрирующий применение сформулированной теоремы. Отметим, во избежание недоразумений, что при фактической реализации алгоритма никаких «сжатий» для получения параметра  $\varepsilon$  делать не следует. Работать нужно с уравнением (3), полагая во всех формулах  $\varepsilon=1$ .

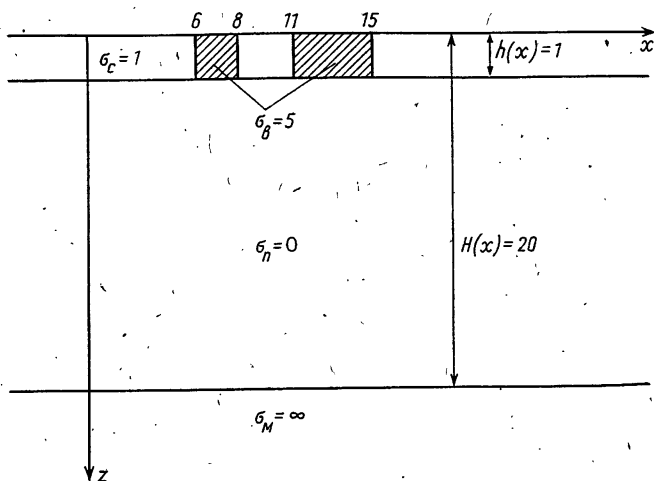


Рис. 2. Распределение электропроводности, взятое для численного примера.  $\sigma_c$  — проводимость верхнего слоя;  $\sigma_b$  — проводимость вставок в верхнем слое;  $\sigma_n$  — проводимость среднего слоя;  $\sigma_m$  — проводимость подстилающего основания

Рассмотрим структуру, изображенную на рис. 2. Если пользоваться терминологией работы [12], то это трехслойная структура с поверхностными включениями. В предположении, что в эту

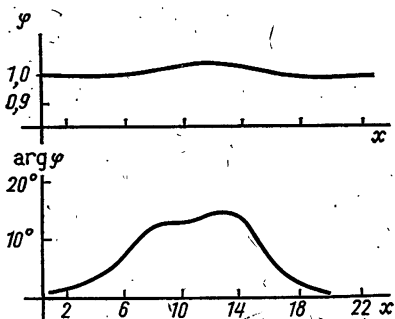


Рис. 3. Функция  $\varphi(x, \omega) = u(x, z, \omega)|_{z=0}$  при  $\omega=0,04$

среду падает плоская волна, рассчитано решение прямой задачи для уравнения (3). Обычно при таких расчетах используются безразмерные параметры. Фактически и мы это делаем, приняв некоторые параметры равными единице, а все остальные — положив равными значениям безразмерных параметров. На рис. 3, 4 показаны модули и аргументы функций  $\varphi$  и  $\psi$  для  $\omega=0,04$ .

В качестве исходной информации для решения обратной задачи брались значения  $\varphi$  и  $\psi$  при  $\omega$ , заключенных в интервале  $0,02 < \omega < 0,06$ . При решении обратной задачи определялись только проводимость поверхностного слоя (функция  $f(x)$ ) и расстояние

до идеального проводника (функция  $H(x)$ ). Все остальные параметры считались известными. Априорная информация относительно искомых параметров бралась такой:  $20 < H \leq 30$ ;  $0,5 \leq f \leq 10$ . Результаты трех первых приближений показаны на рис. 4, 5. Последующие приближения не дают улучшения аппроксимации функции  $\psi(x, \omega)$ , поэтому третье приближение нужно считать окончательным ответом, даваемым рассматриваемым методом.

На приведенных рисунках приняты следующие обозначения: сплошной линией изображены исходные данные, штриховой — нулевое приближение; крестиками — первое приближение, кружками — третье приближение. Второе приближение пропущено, чтобы не загромождать рисунки.

Полученное решение можно признать вполне удовлетворительным, особенно если учесть, что метод ориентирован на нахождение гладких функций, а мы пытались восстановить разрывные функции. Эта наша попытка вызвана тем, что в геофизике сейчас используются именно такие модели с разрывными функциями, и было интересно посмотреть, что дает метод для таких традиционных моделей.

Рассмотренный численный пример показывает, что интерпретация в классе квазиодномерных моделей может быть весьма удачной, но в то же время тот же пример показывает, что высокой точности даже при абсолютно верных входных данных этот метод не дает. И дело здесь не только в том, что мы пытались разрывные функции приблизить гладкими. То же самое, только на более низком уровне погрешностей, будет и для гладких исходных разрезов. Такой характер сходимости — до некоторого номера улучшение точности, а после этого номера прекращение улучшения — как раз и характерен для асимптотической сходимости. Поэтому целесообразно дополнить метод интерпретации в классе квазиодномерных моделей другими методами, которые позволяли бы уточнять найденное решение.

Один из методов уточнения мы рассматриваем в следующем параграфе.

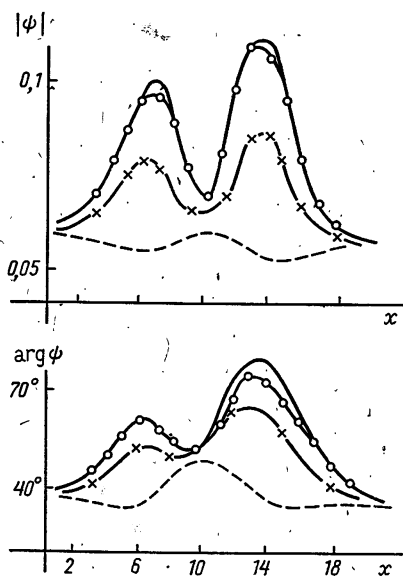


Рис. 4. Исходная информация для решения обратной задачи и последовательные приближения к ней при  $\omega = 0,04$



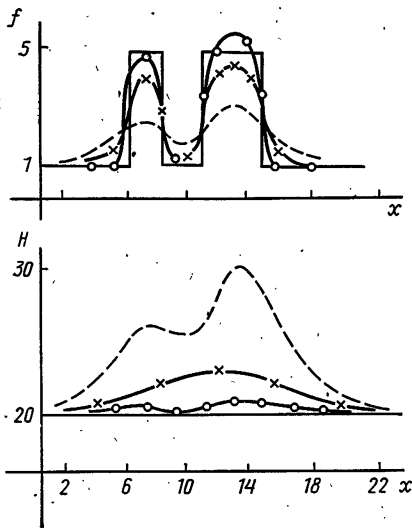


Рис. 5. Функции, характеризующие исходное распределение электропроводности и последовательные приближения к ним

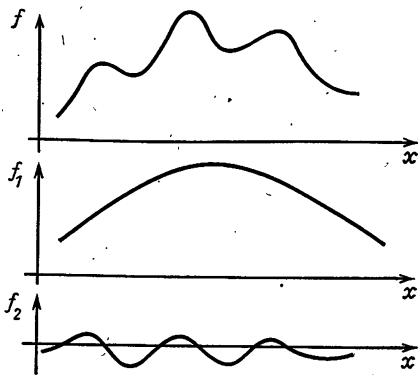


Рис. 6. Представление функции  $f$  в виде суммы плавно меняющейся функции  $f_1$  и небольшой добавки  $f_2$

## § 2. Метод уточнения результата интерпретации в классе квазиодномерных моделей

Гипотеза о том, что среда является квазиодномерной, заключается в предположении о медленном изменении вдоль горизонтальной переменной коэффициента в уравнении (3). Это означает, что функцию  $\sigma(x, z)$  можно представить в виде

$$\sigma(x, z) = \sigma_1(\varepsilon x, z),$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.

На практике, конечно, гораздо чаще встречается случай, когда функция представима в виде суммы квазиодномерной компоненты и некоторой добавки:

$$\sigma(x, z) = \sigma_1(\varepsilon x, z) + \sigma_2(x, z).$$

Предположим дополнительно, что добавка  $\sigma_2(x, z)$  мала по сравнению с функцией  $\sigma_1$ . Последнее предположение не такое уж и обременительное. Более или менее произвольную функцию можно представить в виде суммы плавно меняющейся компоненты и малой добавки (рис. 6). Малость добавки позволяет ввести малый параметр  $\gamma$  и считать, что коэффициент  $\sigma(x, z)$  представим в виде

$$\sigma(x, z) = \sigma_1(\varepsilon x, z) + \gamma \sigma_2(x, z). \quad (16)$$

Итак, считаем, что коэффициент  $\sigma$  в (3) представим в виде (16), где  $\sigma_1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\sigma_2(\xi_1, \xi_2)$  — обычные функции (имеется в виду, что для них не предполагается какой-либо плавности или мало-

сти), а  $\varepsilon$  и  $\gamma$  — малые параметры. Будем считать также, что первичное поле имеет размер неоднородностей по  $x$ , не меньший, чем функция  $\sigma_1(\varepsilon x, z)$  (при магнитотеллурическом зондировании — концепция плоской падающей волны [13]). Тогда граничные функции  $\varphi$  и  $\psi$  из (4) имеют представление, аналогичное (16).

Сделанные предположения позволяют наметить следующую последовательность операций при решении обратной задачи для уравнения (3).

1) Исходная информация (функции  $\psi(x, \omega)$  и  $\varphi(x, \omega)$  из (4)) представляется в виде суммы плавно меняющейся компоненты и малой добавки:

$$\begin{aligned}\psi(x, \omega) &= \psi_1(\varepsilon x, \omega) + \gamma \psi_2(x, \omega), \\ \varphi(x, \omega) &= \varphi_1(\varepsilon x, \omega) + \gamma \varphi_2(x, \omega).\end{aligned}$$

Такое представление, разумеется, неединственно. Заметим, что эллиптический оператор (3) «сглаживает» неоднородности коэффициента  $\sigma(x, z)$ , поэтому во многих случаях можно принять

$$\psi_1(\varepsilon x, \omega) = \psi(x, \omega), \quad \varphi_1(\varepsilon x, \omega) = \varphi(x, \omega).$$

2) По функциям  $\psi_1, \varphi_1$  восстанавливается методом § 1 квазиодномерная компонента  $\sigma_1$ . Стоит сразу же отметить, что функция  $\sigma_1(\varepsilon x, z)$  не есть заранее фиксированная и только нам неизвестная функция. Этот коэффициент определяется по функциям  $\varphi_1, \psi_1$  как квазирешение обратной задачи для уравнения (5). После нахождения функции  $\sigma_1(\varepsilon x, z)$  нужно «подправить» функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$ , например, так: функцию  $\varphi_1$  оставить без изменения, а за функцию  $\psi_1$  принять решение прямой задачи для уравнения (3). Таким образом, если функция  $u_1(x, z, \omega)$  — решение уравнения

$$\begin{aligned}\Delta u_1 + i\omega \sigma_1(x, z) u_1 &= 0, \\ u_1|_{z=0} &= \varphi_1(x, \omega)\end{aligned}$$

(остальные условия, обеспечивающие единственность решения прямой задачи мы не пишем), то функция  $\psi_1$  определяется соотношением

$$\psi_1(x, \omega) = \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Параметр  $\varepsilon$  опущен, так как считаем теперь  $\varepsilon$  малым, но фиксированным числом.

3) Пусть функция  $\sigma_1(x, z)$  уже известна. Для определения функции  $\gamma \sigma_2(x, z) = \sigma(x, z) - \sigma_1(x, z)$  мы выпишем линеаризованную задачу. (Можно было бы, наверное, по параметру  $\gamma$  устроить такое же разложение, как в § 1 по параметру  $\varepsilon$ . Но и в более простых ситуациях принято ограничиваться линейным приближением [14, 15], поэтому и мы поступим так же.)

Линеаризованная задача относительно функции  $\sigma_2$  выглядит следующим образом:

$$\Delta v + i\omega \sigma_1(x, z) v = -i\omega \sigma_2(x, z) u_1(x, z, \omega), \quad (17)$$

$$v|_{x=0} = \varphi(x, \omega) - \varphi_1(x, \omega) = \varphi_2, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi(x, \omega) - \psi_1(x, \omega) = \psi_2. \quad (19)$$

Условия (17), (18) однозначно определяют решение  $v(x, z, \omega)$  при известной функции  $\gamma\sigma_2(x, z)$  (разумеется, при соответствующих условиях сопряжения и условиях на бесконечности) и, стало быть, функцию  $\psi_2(x, \omega)$  из (19). Обратная задача для (17) — (19) состоит в нахождении функции  $\gamma\sigma_2$  по функции (19). Последняя задача относится к типу обратных задач теории потенциала [16, 17] специального вида: неизвестная функция  $\sigma_2$  в правой части (17) при каждом  $\omega$  умножается на известные, но различные функции.

Исследование обратной задачи для (17) включает в себя выяснение вопроса о единственности решения и разработку метода фактического нахождения коэффициента  $\sigma_2$ . Нас в настоящей статье больше интересует метод нахождения коэффициента  $\sigma^2(x, z)$ . Введем функцию Грина первой краевой задачи для уравнения (17)  $G(M, M_0, \omega)$ , где  $M = M(x, z)$ ,  $M_0 = M_0(x_0, z_0)$ ,

$$\Delta_M G + i\omega\sigma_1(x, z)G = \delta(M - M_0). \quad (20)$$

Функции  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$ ,  $\sigma_2$  связаны следующим интегральным соотношением:

$$\mu(x, \omega) = \iint_{\substack{\eta > 0 \\ -\infty < \xi < \infty}} R(x, \xi, \eta, \omega) \sigma_2(\xi, \eta) u_1(\xi, \eta, \omega) d\xi d\eta, \quad (21)$$

где

$$\mu(x, \omega) = \psi_2(x, \omega) - \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z_M} \varphi_2(\xi, \omega) d\xi \right) \right|_{z=0},$$

$$R(x, \xi, \eta, \omega) = -i\omega \left. \frac{\partial G}{\partial z} (x, z, \xi, \eta, \omega) \right|_{z=0}.$$

Таким образом, восстановление коэффициента  $\sigma_2(x, z)$  сводится к решению интегрального уравнения (21). Центральным моментом при этом является построение ядра  $R$ . В общей ситуации такое построение — задача очень трудоемкая. Решение ее фактически подразумевает решение множества уравнений типа (17). В рассматриваемом случае нам помогает то обстоятельство, что коэффициент  $\sigma_1$  в (20) является медленно меняющейся функцией:  $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon x, z)$ . Поэтому возможно получить разложение ядра  $R$  по параметру  $\varepsilon$ . Можно ожидать, что построение нескольких членов разложения будет более легкой задачей, чем непосредственное вычисление функций Грина (как это обычно и бывает при асимптотических разложениях [18]). Исследование общей ситуации в этом плане еще предстоит, в данной же работе мы проиллюстрируем высказанные соображения на примере модельной задачи.

Рассмотрим вещественное уравнение

$$\Delta u - \sigma(x)u = 0 \quad (22)$$

в полосе

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < z < 1, \quad (23)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{z=0} = 1, \quad u|_{z=1} = 0, \quad (24)$$

Будем предполагать, что коэффициент  $\sigma(x)$  в (22) является кусочно-гладкой функцией, удовлетворяющей условию

$$0 < A \leq \sigma(x) \leq B, \quad (25)$$

где  $A, B$  — некоторые числа. На границах разрыва коэффициента  $\sigma(x)$  на функцию  $u$  наложим условия сопряжения:

$$[u] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (26)$$

Введем функцию

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (27)$$

Определение функции  $\psi(x)$  по коэффициенту  $\sigma(x)$  из (22) назовем прямой задачей для уравнения (22). Задачу восстановления коэффициента  $\sigma(x)$  по функции  $\psi(x)$  будем называть обратной задачей для уравнения (22). При решении этой обратной задачи будем руководствоваться теми соображениями, которые высказаны в начале параграфа.

Считаем, что коэффициент  $\sigma$  в (22) представим в виде

$$\sigma(x) = \sigma_1(\varepsilon x) + \gamma \sigma_2(x),$$

где  $\varepsilon, \gamma$  — малые параметры. Найдем сначала функцию  $\sigma_1$ , которую, по-видимому, разумно в этом случае назвать квазипостоянной компонентой коэффициента  $\sigma(x)$ . Затем с помощью уравнения, аналогичного уравнению (21), найдем добавку  $\sigma_2(x)$ . Так как функция  $\varphi(x) = 1$ , то разумно взять такое разложение этой функции в сумму медленно меняющейся функции  $\varphi_1$  и добавки  $\varphi_2$ :  $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 0$ . Уравнение (21) для решаемой задачи запишется в виде

$$\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) \sigma_2(s) ds, \quad (28)$$

где

$$K(x, s) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial z}(x, 0, s, t) v(s, t) dt.$$

Здесь  $G(x, z, s, t)$  — функция Грина первой краевой задачи для уравнения (22);  $v(z, x)$  — решение уравнения (22), когда коэффициент  $\sigma(x)$  заменен на квазипостоянную компоненту  $\sigma_1(\varepsilon x)$ . Для построения ядра  $K(x, s)$  из (28) удобным оказалось приме-

нить метод регуляризации сингулярных возмущений Ломова [19]. При этом ядро разлагается в ряд:

$$K(x, s) = K_0(x, s) + \varepsilon K_1(x, s) + \dots$$

Для численных расчетов мы будем использовать только функцию  $K_0(x, s)$ , считая, что  $K(x, s) \approx K_0(x, s)$ .

Вывод формулы для  $K_0(x, s)$  мы приводить не будем, а ограничимся лишь окончательным ответом:

$$K_0(x, s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi n)^2}{(\sigma_1(s) + (\pi n)^2)^{5/4} (\sigma_1(x) + (\pi n)^2)^{1/4}} \times \exp\left(- \left| \int_x^s ((\pi n)^2 + \sigma_1(t))^{1/2} dt \right| \right). \quad (29)$$

Параметр  $\varepsilon$  в аргументе функции  $\sigma_1$  мы не пишем, считая его равным единице, как это всегда и делается при численных расчетах.

Рассмотрим пример, относящийся к уравнению (22). Решим прямую задачу (22)—(24) для функции  $\sigma(x)$ , изображенной на рис. 7 сплошной линией. Функция  $\sigma$  выбрана разрывной из тех же соображений, что и раньше: такого рода модели приняты в настоящее время в геофизике. Функцию  $\psi(x)$  из (27), соответствующую  $\sigma(x)$ , будем считать исходной информацией для решения обратной задачи; график функции  $\psi$  изображен сплошной линией на рис. 8.

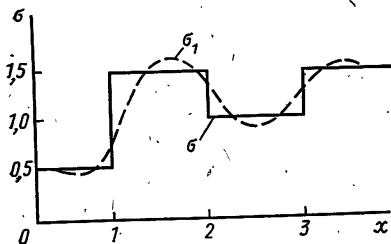


Рис. 7. Исходная функция  $\sigma(x)$  и квазипостоянное приближение к ней

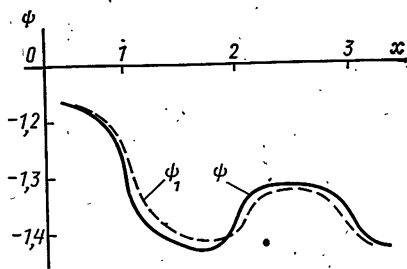


Рис. 8. Исходная информация для решения обратной задачи и квазипостоянное приближение к ней

Теперь методом § 1 находим квазипостоянную компоненту функции  $\sigma(x)$ , которую мы обозначим  $\sigma_1$ . Для этого нужно представить функцию  $\psi$  в виде  $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ , где  $\psi_1$  медленно меняется, а  $\psi_2$  мала по сравнению с  $\psi_1$ . В данном случае мы этот вопрос решили тривиальным образом: положили  $\psi_1(x) = \psi(x)$ . В качестве априорной информации о функции  $\sigma_1(x)$  бралось неравенство  $0,2 < \sigma_1 < 3$ . Восстановленная квазипостоянная компонента  $\sigma_1(x)$  показана на рис. 7 штриховой линией. Соответствующая этой  $\sigma_1(x)$  функция

$\psi_1(x)$  изображена на рис. 8 тоже штриховой линией. Решение на этом этапе потребовало двух итераций. Далее мы ищем добавку  $\sigma_2 = \sigma(x) - \sigma_1(x)$  по функции  $\psi_2(x) = \psi(x) - \psi_1(x)$ . График функции  $\psi_2(x)$  изображен на рис. 9 сплошной линией.

Для того чтобы выяснить, насколько хорошо функция  $K_0(x, s)$ , определяемая формулой (29), приближает ядро  $K(x, s)$  из (28), вычислим функцию  $\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x, s) (\sigma(s) - \sigma_1(s)) ds$ . Напомним,

что уравнение (28) тоже является линейным приближением по  $y$  к оператору решения прямой задачи. Функцию  $\eta(x)$ , можно интерпретировать как решение прямой задачи с приближенно заданным оператором. Точное решение этой прямой задачи — функция  $\psi_2(x)$ . График функции  $\eta$  изображен на рис. 9 крестиками. Совпадение функций  $\eta(x)$  и  $\psi_2(x)$  вполне удовлетворительное.

Далее решим интегральное уравнение (28), в котором ядро  $K(x, s)$  заменено на  $K_0(x, s)$ . Применялся обычный метод регуляризации со стабилизирующим функционалом вида  $\Omega(y(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (y^2(x) + (y')^2) dx$ . Параметр регуляризации выбирался одним из вариантов метода обобщенной невязки [20]. На рис. 10 кружками изображено решение интегрального уравнения, сплошной

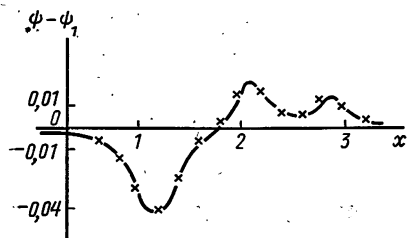


Рис. 9. Исходная информация для решения линеаризованной задачи и приближение к ней

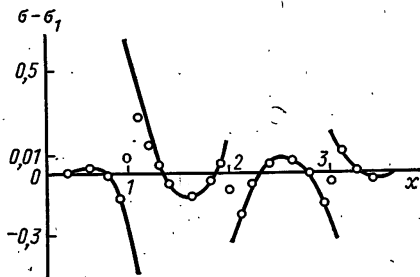


Рис. 10. Приближение к решению линеаризованной обратной задачи

линией показан график функции  $\sigma_2(x) = \sigma - \sigma_1$ . Приближение нужно признать довольно хорошим, так как мы пытались разрывную функцию приблизить гладкой.

На рис. 11 приведен результат решения обратной задачи для гладкой функции. Сплошной линией изображен график функции  $\sigma(x)$ , для которой решалась прямая задача. Соответствующая функция  $\psi(x)$  служила исходной информацией для решения обратной задачи. Штриховой линией на рис. 11 изображен график квазипостоянной компоненты  $\sigma_1(x)$ , найденной методом § 1. Окончательный ответ отмечен кружками. Совпадение с исходной функцией  $\sigma(x)$  получалось практически идеальным.

Рассмотренная модельная задача подтверждает эффективность схемы, приведенной в начале этого параграфа.

В геофизике широко используются простейшие модели строения

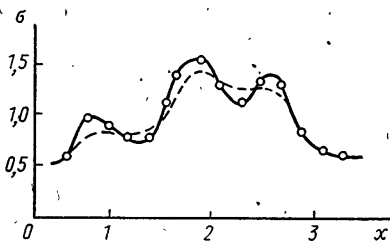


Рис. 11. Результаты решения обратной задачи для гладкой исходной функции

моделей двух классов: 1) слоистые среды с локальными неоднородностями (в заданной слоистой среде расположено тело однородной проводимости неизвестной формы); 2) квазислоистые среды — среды, аналогичные слоистым, но с криволинейными границами разделов и меняющейся внутри слоев проводимостью.

Задачи первого класса обычно решаются методом подбора: форма неоднородности задается через какие-то параметры, и функционал невязки между исходными и рассчитанными данными минимизируется по этим параметрам.

Большее значение имеют квазислоистые среды, которые выделяют широкий класс практически важных задач. Так как этот класс в некотором смысле близок к классу слоистых сред, то устойчивость интерпретации в нем достаточно высока.

В настоящей статье для математического описания квазислоистых сред введен класс квазиодномерных моделей. Решение обратной задачи в этом классе свелось к решению одномерных обратных задач и небольшого числа прямых двумерных задач. В необходимых случаях полученное решение можно уточнить методами, аналогичными методам обратной задачи теории потенциала. Модельные примеры показывают эффективность разработанных алгоритмов. Они могут быть использованы при интерпретации данных магнитотеллурического зондирования в соответствующих ситуациях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. — Докл. АН СССР, 73, № 2, 1950.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 545—548.

3. Дмитриев В. И., Руднева Т. Л. Об обратной задаче глубинного магнитотеллурического зондирования. — В сб.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. — М.: Изд-во МГУ, 1973, с. 241—245.
4. Глазко В. Б., Кулик Н. И., Тихонов А. Н. Об определении геоэлектрического разреза на основе метода регуляризации. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 1, с. 139—149.
5. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск. — М.: Наука, 1982.
6. Романов В. Г., Савин М. Т. Задача определения тензора проводимости в неоднородной по глубине анизотропной среде. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1984, № 2, с. 84—94.
7. Барашков А. С. Обратная задача для уравнения Гельмгольца в полсе. — Труды МЭИ. Вып. 499, 1980, с. 53—57.
8. Барашков А. С. Восстановление области задания уравнения Гельмгольца с малым параметром. — Изв. вузов. Математика, 1983, №8, с. 3—7.
9. Барашков А. С. Об одной обратной задаче для уравнения Гельмгольца в области с неизвестной границей. — Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1984, т. 24, № 2, с. 309—314.
10. Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Основы интерпретации кривых магнитотеллурического зондирования. — М.: Изд-во МГУ, 1975.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
12. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Ю. Г. Альбом палеток для магнито-теллурического зондирования в неоднородных средах. Ч. 2. — М.: Изд-во МГУ, 1973.
13. Бердичевский М. Н., Ваньян Л. Л. Магнитотеллурические исследования в СССР. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1977, № 1, с. 105—110.
14. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1969.
15. Запреев А. С., Чеверда В. А. О некоторых обратных задачах для волнового уравнения. — В сб.: Математические методы решения прямых и обратных задач геофизики. Новосибирск, Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1981, с. 39—54.
16. Страхов В. Н. Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности. — Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 3, с. 564—565.
17. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала. — Мат. заметки, 1973, т. 14, № 5, с. 755—765.
18. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1982.
19. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
20. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.

*А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов*

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ

Задача определения постоянных распространения и структуры полей нормальных волн экранированных регулярных щелевых и полосковых линий передачи представляет собой сложную спектральную задачу для системы уравнений Максвелла. Исследованию этой задачи в строгой постановке посвящено много работ; однако до настоящего времени остается актуальной задача повышения эффективности алгоритмов расчета регулярных микрополосковых линий, особенно линий на многослойной подложке.



Будем рассматривать регулярную экранированную микрополосковую или щелевую линию, образованную системой металлических полосок, нанесенных на границу раздела двух диэлектрических сред в прямоугольном волноводе. Продольную ось системы будем обозначать через  $z$ . Сечение линии плоскостью  $z = \text{const}$  образовано прямоугольными областями  $S_1 = \{(x, y) | 0 < y < b_1, -a < x < a\}$  и  $S_2 = \{(x, y) | -b_2 < y < 0, -a < x < a\}$ .

Обозначим через  $L$  совокупность щелей на границе  $y=0$ . Эта совокупность представляет собой конечное число интервалов без общих точек. Остальная часть границ областей  $S_1$  и  $S_2$  металлизирована и будет обозначаться через  $M$ ;  $M_B$  и  $M_T$  — соответственно вертикальная и горизонтальная части  $M$ . Среда, заполняющая прямоугольный волновод, магнитооднородна, а диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является кусочно-постоянной функцией переменной  $y$ :  $\varepsilon = \varepsilon(y) = \varepsilon_i, y_{i-1} < y < y_i, i = 1, \dots, N$ . Обозначим через  $L_0$  совокупность границ раздела сред.

Определение полей нормальных волн полосковых линий состоит обычно [1] в определении нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла с гармонической зависимостью от времени  $t$  и координаты  $z$ :  $\exp(i\gamma z - i\omega t)$ , — удовлетворяющих краевым условиям на поверхности металла и условиям сопряжения на границе разрыва непрерывных характеристик среды. В окрестности кромок и ребер ставятся условия на ребре. Именно так строятся поля в работах [12, 13].

Данная работа посвящена исследованию модельных задач, аналогичных рассматриваемым в [12, 13].

Будем рассматривать пару независимых скалярных задач для уравнения Гельмгольца с разрывным коэффициентом  $\tilde{k}^2 = k^2 - \gamma^2$ ,  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ :

$$\Delta_2 u + \tilde{k}^2 u = 0, \quad (1)$$

$$(x, y) \in S_1 \cup S_2 \setminus L_0,$$

$$u|_{M_B} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_T} = 0, \quad (2)$$

$$[u]_{L_0} = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{L_0} = 0, \quad (3)$$

$$\Delta_2 v + \tilde{k}^2 v = 0,$$

$$(x, y) \in S_1 \cup S_2 \setminus L_0, \quad (4)$$

$$v|_{M_T} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{M_B} = 0, \quad (5)$$

$$[v]_{L_0} = \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{L_0} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $[f]_{L_0}$  означает разность верхнего и нижнего предельных значений функции  $f$  при стремлении к  $L_0$ . Через  $M_v$  и  $M_h$  обозначены металлизированные вертикальные и горизонтальные границы. Как обычно,

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В настоящей работе будет показано, что при некоторых  $\gamma$ , называемых характеристическими числами, существуют нетривиальные решения задач (1)–(3), (4)–(6); будет развит численный метод их определения. Поставленные задачи сводятся к нелинейным задачам на собственные значения для интегральных оператор-функций с логарифмической особенностью ядра.

Краевые задачи (1)–(3), (4)–(6) являются неклассическими краевыми задачами для уравнения Гельмгольца. На прямой  $y=0$  заданы краевые условия для различных интервалов; это приводит к тому, что может не существовать непрерывного в замкнутых областях  $S_1$  и  $S_2$  решения краевой задачи. В этой связи необходимо поставить дополнительные условия в форме принадлежности следа решения задачи определенному функциональному пространству. Такие условия будут сформулированы в § 1.

## § 1. Интегральные оператор-функции, отвечающие исходным краевым задачам

Будем рассматривать щелевую линию передачи на подвешенной подложке (рис. 1):

$$L = \{(x, y) | y=0, -w \leq x \leq w, w < a\}.$$

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (1)–(3) будем называть всякую функцию  $u$ ,

$$u \in C^2(S_1 \cup S_2 \setminus L_0) \cap C^1(\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \setminus L_0),$$

удовлетворяющую (1)–(3), след производной которой при  $y = \pm 0$  представим в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = \frac{\varphi_{\pm}(x)}{\sqrt{w^2 - x^2}}, \quad \varphi_{\pm} \left( \frac{t}{w} \right) \in \tilde{W}_2^1,$$

где

$$\tilde{W}_2^1 = \{ \varphi | \varphi \in C[-1, 1], \varphi' \in L_2([-1, 1], \sqrt{1-t^2} dt) \}.$$

Выбор класса  $\tilde{W}_2^1$  будет ясен из теоремы 6 (§ 3).

Определение. Решением задачи (4) — (6) будем называть всякую функцию  $v$ ,  $v \in C^2(S_1 \cup S_2 \setminus L_0) \cap C^1(\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \setminus L_0)$ , удовлетворяющую (4) — (6),

$$(v(x, 0))' = \frac{\psi(x)}{\sqrt{w^2 - x^2}}, \quad \psi\left(\frac{t}{w}\right) \in \tilde{W}_2,$$

$$v(-w, 0) = v(w, 0) = 0$$

Весовые пространства  $\tilde{W}_2^1$  выбраны так, чтобы удовлетворить условиям теоремы 6.

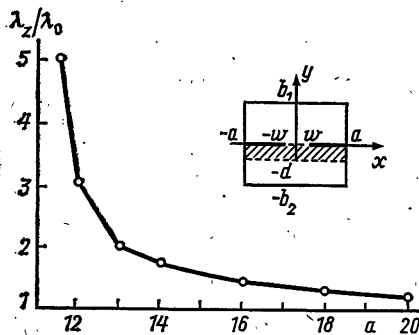


Рис. 1.  $\varepsilon=9,6$ ;  $w=0,2d$ ;  $d=1,27$ ;  
 $b_1=8$ ,  $b_2=8$ ;  $d=0,03\lambda_0$

Пусть  $G^{u_{1,2}}(x, y, x_0, y_0)$  — функция Грина краевой задачи для уравнения (1) в области  $S_1(S_2)$  с условием (2) на границе, а  $G^{v_{1,2}}(x, y, x_0, y_0)$  — функция Грина краевой задачи в области  $S_1(S_2)$  для уравнения (4) с условием (5) на границе. Для построения этих функций можно воспользоваться методом разделения переменных [2]. Применяя вторую формулу Грина к прямоугольным областям  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, получим интегральные представления для решения исходной задачи:

$$u(P) = \begin{cases} u_1(P) = \int_L \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_1^u(x, y, x_0, 0) dx_0, & P \in S_1, \\ u_2(P) = - \int_L \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} G_2^u(x, y, x_0, 0) dx_0, & P \in S_2, \end{cases} \quad (7)$$

$$v(P) = \begin{cases} v_1(P) = - \int_L v_1(x_0, 0) \frac{\partial G_1^v}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} dx_0, & P \in S_1, \\ v_2(P) = \int_L v_2(x_0, 0) \frac{\partial G_2^v}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0} dx_0, & P \in S_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$P = (x, y).$$

Из условия сопряжения (3) и (6) на отверстиях связи получаем, что

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_L = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \Big|_L, \quad v_1(x_0, 0) = v_2(x_0, 0), \quad x_0 \in L,$$

$$\int_L \{ \varepsilon_1 G_1^u(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon_2 G_2^u(x, 0, x_0', 0) \} \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_{dx_0} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_L = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\omega^2 - x_0^2}}, \quad \varphi(x_0) \in \widetilde{W}_2^1,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \int_L \frac{\partial G_1^v}{\partial y_0} \Big|_{y=0} v_1(x_0, 0) dx_0 + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \int_L \frac{\partial G_2^v}{\partial y_0} \Big|_{y=0} \times \\ \times v_1(x_0, 0) dx_0 = 0, \quad (v_1(x_0, 0))' = \frac{\psi(x_0)}{\sqrt{\omega^2 - x_0^2}}, \quad (10)$$

$$\psi(x_0) \in \widetilde{W}_2^1, \quad v_1(-\omega, 0) = v_1(\omega, 0) = 0.$$

Обозначим через  $\Lambda^1$  и  $\Lambda^2$  все полюсы функций Грина  $G^{u_{1,2}}$  и  $G^{v_{1,2}}$  соответственно. Имеет место следующая теорема о спектральной эквивалентности.

**Теорема 1.** На множестве  $C \setminus \Lambda^1(C \setminus \Lambda^2)$  задачи (1)–(3) и (9) ((4)–(6) и (10)) эквивалентны. Точнее, если при некотором  $\gamma = \gamma_0 \notin \Lambda^1(\Lambda^2)$  существует нетривиальное решение задачи (1)–(3) (задачи (4)–(6)), то ему соответствует нетривиальное решение операторного уравнения (9) ((10)) и наоборот.

**Доказательство.** При сведении краевой задачи к интегральному уравнению получено доказательство прямого утверждения, поскольку нетривиальное решение должно удовлетворять интегральному уравнению (9) ((10)). Пусть  $\mu(x_0)$  — нетривиальное решение интегрального уравнения (9). Построим функцию  $u(x)$  по формуле (7), подставляя вместо  $\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_{y_0=0}$  функцию  $\mu(x_0)$ .

В силу свойств функций Грина все условия, кроме условий шивания (3) на  $L$ , для решения краевой задачи будут выполнены. Ввиду непрерывности потенциала с логарифмической особенностью в ядре [3] предельные значения функции  $u_1(P)$  при  $P$ , стремящемся к точке на  $L$ , и  $u_2(P)$  при  $P$ , стремящемся к точке на  $L$ , в силу уравнения (9) будут совпадать. Вычислим теперь  $\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \Big|_{y_0 \rightarrow +0}$

и  $\frac{\partial u_2}{\partial y_0} \Big|_{y_0 \rightarrow -0}$ . По теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя будем иметь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = \mu(x_0) + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \int_L G_1^u(x, y, x_0, 0) \mu(x_0) dx_0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=-0} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mu(x_0) - \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=0} \int_L G_2^u(x, y, x_0, 0) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \mu(x_0) dx_0.$$

Так как в силу свойств функций Грина  $G_1^u$  и  $G_2^u$  прямое значение нормальных производных обращается в нуль на множестве  $L$ , то

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \right|_{y_0=+0} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left. \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \right|_{y_0=-0} = \mu(x_0).$$

Следовательно, любое нетривиальное решение операторного уравнения даст решение краевой задачи (1) — (3). Аналогичные рассуждения справедливы и для второй краевой задачи и операторного уравнения (10).

Остается заметить, что на множестве  $C \setminus \Lambda^1 (C \setminus \Lambda^2)$  построение функций Грина возможно и имеют место представления (7) и (8).

Случай  $\gamma \in \Lambda^1 (\Lambda^2)$  должен быть рассмотрен отдельно, так как интегральные представления (7) в той точке не имеют места. Однако  $\gamma \in \Lambda^1 (\Lambda^2)$  обычно известны и проверка того, что они удовлетворяют условиям существования нетривиальных решений, труда не представляет, при этом  $\Lambda^1$  и  $\Lambda^2$  содержат лишь конечное число вещественных  $\gamma$ .

Для щелевой линии с подвешенной подложкой (с диэлектрической проницаемостью подложки  $\varepsilon$  и вакуумом во всей остальной части волновода) ядро в уравнении (9) имеет вид

$$G_1^u(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon G_2^u(x, 0, x_0, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda) \sin \frac{\pi n(x+a)}{2a} \sin \frac{\pi n(x_0+a)}{2a},$$

$$\alpha_n(\lambda) = -\frac{1}{a} \left[ \frac{\operatorname{cth}(b_1 \sqrt{z})}{\sqrt{z}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{z-\delta}} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{\varepsilon \sqrt{z} \operatorname{sh}(b \sqrt{z}) \operatorname{sh}(d \sqrt{z-\delta}) + \sqrt{z-\delta} \operatorname{ch}(d \sqrt{z-\delta}) \operatorname{ch}(b \sqrt{z})}{\varepsilon \sqrt{z} \operatorname{sh}(b \sqrt{z}) \operatorname{ch}(d \sqrt{z-\delta}) + \sqrt{z-\delta} \operatorname{sh}(d \sqrt{z-\delta}) \operatorname{ch}(b \sqrt{z})} \right\} \right],$$

где

$$z = \left( \frac{\pi n}{2a} \right)^2 - 1 + \lambda; \quad \delta = \varepsilon - 1; \quad \lambda = \gamma^2; \quad b = b_2 - d;$$

$d$  — толщина подложки;  $\alpha_n(\lambda)$  — мероморфная функция имеющая только простые полюсы (здесь произведена «нормировка»  $\lambda/(\mu\omega^2) \rightarrow \lambda$ ,  $\mu\omega^2 l^2 \rightarrow l$ , где  $l$  — линейный размер). Можно переписать в другом виде, выделив логарифмическую особенность в ядре

$$G_1^u(x, 0, x_0, 0) + \varepsilon G_2^u(x, 0, x_0, 0) = \frac{1+\varepsilon}{\pi} \ln|x-x_0| + N(\lambda, x, x_0),$$

где

$$N(\lambda, x, x_0) = \frac{1+\varepsilon}{\pi} \left[ \ln \left\{ \sin \frac{\pi|x-x_0|}{4a} \right\} - \ln \left\{ |x- \right.$$

$$-x_0 \left| \cos \frac{\pi(x+x_0)}{4a} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n(\lambda) + \frac{1+\varepsilon}{\pi n} \right) \sin \frac{\pi n(x+a)}{2a} \times \\ \times \sin \frac{\pi n(x_0+a)}{2a}.$$

Здесь  $N(\lambda, x, x_0)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $x_0$ , голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \Lambda^1$  по  $\lambda$ , а вторая производная по  $x$  или  $x_0$  имеет логарифмическую особенность при  $x=x_0$ .

Уравнение (10) интегрированием по частям может быть сведено к сингулярному уравнению, ядро которого запишем в виде

$$\frac{\pi}{4a} \beta_0(\lambda) x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(\lambda)}{n} \cos \frac{\pi n(x+a)}{2a} \sin \frac{\pi n(x_0+a)}{2a}, \\ \beta_n(\lambda) = \sqrt{z} \operatorname{cth}(b_1 \sqrt{z}) + \sqrt{z-\delta} \times \\ \times \frac{\sqrt{z-\delta} \operatorname{sh}(d\sqrt{z-\delta}) \operatorname{sh}(b\sqrt{z}) + \sqrt{z} \operatorname{ch}(b\sqrt{z}) \operatorname{ch}(d\sqrt{z-\delta})}{\sqrt{z-\delta} \operatorname{ch}(d\sqrt{z-\delta}) \operatorname{sh}(b\sqrt{z}) + \sqrt{z} \operatorname{ch}(b\sqrt{z}) \operatorname{sh}(d\sqrt{z-\delta})},$$

или, выделяя особенность, в виде

$$\int_{-w}^w \left( \frac{1}{x-x_0} + S(x, x_0) \right) \frac{\psi(x_0)}{\sqrt{w^2-x_0}} dx_0 = 0, \\ S(x, x_0) = \frac{\pi}{4a} \theta \left( \frac{\pi(x_0-x)}{4a} \right) - \frac{\pi}{4a} \operatorname{tg} \frac{\pi(x_0+x)}{4a} - \frac{\pi^2}{4a^2} \beta_0(\lambda) x_0 - \\ - \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta_n(\lambda)}{n} - 1 \right) \cos \frac{\pi n(x+a)}{2a} \sin \frac{\pi n(x_0+a)}{2a};$$

здесь

$$\theta(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1};$$

$B_n$  — числа Бернулли,  $0 < |x| < \pi$ . В наших обозначениях

$$v(x_0, 0) = \int_{-w}^{x_0} \frac{\psi(t) dt}{\sqrt{w^2-t^2}} + C,$$

а так как  $v(-w, 0) = v(w, 0)$ , то  $\int_{-w}^w \frac{\psi(t) dt}{\sqrt{w^2-t^2}} = 0$ .

Это условие позволяет свести сингулярное уравнение к уравнению с логарифмическим ядром и применять развитые ниже методы для исследования задачи (10). Функция  $S(x, x_0) =$

$=S(\lambda, x, x_0)$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \Lambda^2$  по  $\lambda$ , непрерывна по  $x, x_0$  с производной, имеющей логарифмическую особенность при  $x=x_0$ ;  $\beta_n(\lambda)$  мероморфны по  $\lambda$  и имеют лишь простые полюсы. Функция  $F(x, S)$  (см. ниже лемму 1) обладает всеми необходимыми для применения теории свойствами.

**Л е м м а 1.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{W}_2^1$ . Тогда уравнения

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{(x-s)\sqrt{1-s^2}} + \int_{-1}^1 N(x, s) \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}, & |x| < 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$N(x, s)$  непрерывна на  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  и

$$\begin{aligned} G_\varphi(x) &= \int_{-1}^1 \ln|x-s| \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} + \int_{-1}^1 F(x, s) \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0, \\ F(x, s) &= \tilde{F}(x, s) - \int_{-1}^1 \tilde{F}(x, s) \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \\ \tilde{F}(x, s) &= \int_{-1}^x N(t, s) dt \end{aligned} \quad (12)$$

эквивалентны.

**Доказательство.** Заметим, что  $F_x'(x, s) = N(x, s)$  и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(x, s) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

для всех  $S \in [-1, 1]$ .

Пусть  $\varphi$  — решение (11). Рассмотрим  $G_\varphi(x)$ ;  $G_\varphi'(x) = 0$  из (11). (Дифференцирование под знаком интеграла возможно [4].)

Следовательно,  $G_\varphi(x) = \text{const} = C_0$ . Умножим  $G_\varphi(x)$  на  $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$  и проинтегрируем от  $-1$  до  $1$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} G_\varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C_0 = -\ln 2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0$$

в силу второго условия в (11). Здесь мы воспользовались теоремой Фубини о повторных интегралах [5].

Пусть теперь верно (12). Тогда, дифференцируя (12) по  $x$ , получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{(x-s)\sqrt{1-s^2}} + \int_{-1}^1 N(x, s) \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0.$$

Интегрируя (12), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 G_{\varphi}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\ln 2 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = 0.$$

Лемма доказана.

Выпишем окончательно, используя лемму, интегральные уравнения для (1)–(3) и (4)–(6):

$$K_1(\lambda) \varphi = \int_{-1}^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda) \sin \frac{\pi n(\omega x + a)}{2a} \sin \frac{\pi n(\omega s + a)}{2a} \right) \frac{\varphi(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = 0.$$

$$K_2(\lambda) \varphi \equiv \int_{-1}^1 \left( \frac{\pi}{4a} \beta_0(\lambda) x s \omega^2 + 1 + \frac{2a}{\pi} \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(\lambda)}{n^2} \left( \sin \frac{\pi n(\omega x + a)}{2a} + \tau_n \right) \sin \frac{\pi n(\omega s + a)}{2a} \right) \frac{\varphi(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = 0.$$

Здесь обозначено:  $\kappa = \pi\omega/2a$ ,  $\tau_n = 0$ ,  $n$  — четное;  $\tau_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\pi} \times$   
 $\times \mathcal{J}_0(\kappa n)$ ,  $\mathcal{J}_0(t)$  — функция Бесселя,  $n$  — нечетное.

Уравнение (13) имеет логарифмическую особенность (явно не выделена) при  $x=s$ .

Ниже исследуются задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра для интегральных оператор-функций с логарифмической особенностью ядра.

## § 2. Свойства L-оператор-функций

Рассмотрим пространства  $h_p$  последовательностей комплексных чисел  $\xi_k$ :

$$h_p: \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k^p < \infty, \quad p \geq 0, \quad \xi_k \in \mathbb{C}.$$

Скалярное произведение зададим следующим образом:

$$(\xi, \eta)_p = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k k^p, \quad \xi = \{\xi_k\}_1^{\infty}, \quad \eta = \{\eta_k\}_1^{\infty},$$



$$\|\xi\|_p = \sqrt{(\xi, \xi)_p}$$

Пространства  $h_p$ ,  $p \geq 0$  гильбертовы (полные, сепарабельные, евклидовы, бесконечномерные пространства; доказательство этого утверждения аналогично [5, с. 67]).

Будем рассматривать операторы  $L$  и  $L^{-1}$ , заданные в  $h_p$ :

$$L\xi = L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = \left( \xi_1, \frac{1}{2} \xi_2, \dots, \frac{1}{n} \xi_n, \dots \right),$$

$$L^{-1}\eta = L^{-1}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots) = (\eta_1, 2\eta_2, \dots, n\eta_n, \dots).$$

**Теорема 2.** Оператор  $L: h_p \rightarrow h_{p+2}$  — линейный ограниченный обратимый оператор; его обратный  $L^{-1}: h_{p+2} \rightarrow h_p$  ограничен,  $p \geq 0$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $L: h_p \rightarrow h_{p+2}$ .

Пусть  $\xi \in h_p$ . Тогда для  $L\xi: \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k^{-2} k^{p+2} < \infty$ . Аналогично

доказывая, что  $L^{-1}: h_{p+2} \rightarrow h_p$ ,  $\|L\xi\|_{p+2} = \|\xi\|_p$ , получаем  $\xi = L^{-1}\eta$  — единственное решение уравнения  $L\xi = \eta$ .

По теореме Банаха оператор  $L^{-1}$  ограничен [5].

**З а м е ч а н и е.**  $\|L\| = \|L^{-1}\| = 1$ .

Пусть оператор  $A$  задан матрицей  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ :

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots),$$

где  $\eta_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \xi_n$ ,  $k \geq 1$ , и выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k^{p+2}}{i^p} |a_{ki}|^2 \leq C^2 < \infty. \quad (14)$$

**Теорема 3.**  $A: h_p \rightarrow h_{p+2}$  — компактный оператор,  $p \geq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\xi \in h_p$ ,  $A\xi = \eta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{p+2} |\eta_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{p+2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right|^2 \leq \|\xi\|_p^2 \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k^{p+2} \frac{|a_{kj}|^2}{j^p} \leq C^2 \|\xi\|_p^2 \Rightarrow \eta \in h_{p+2}. \end{aligned}$$

Докажем компактность  $A$ . Покажем, что  $A$  есть предел по норме последовательности конечномерных операторов  $A_n$ ,

$$A_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots),$$

где  $\eta_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \xi_j$  ( $1 \leq k \leq n$ ), являющихся «усечением»  $A$ ;

$$\begin{aligned} & \| (A - A_n) \xi \|_{p+2}^2 = \sum_{k=1}^n k^{p+2} \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right|^2 + \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{p+2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right|^2 \leq \| \xi \|_p^2 \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} k^{p+2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{|a_{ki}|^2}{i^p} \right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{p+2} \frac{|a_{ki}|^2}{i^p} \right) \right] \Rightarrow \| A - A_n \| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следствие  $\|A\| \leq C$ .

Замечание. При доказательстве теоремы мы показали, что последовательность операторов  $\{A_n\}$  по норме сходится к  $A$ , т. е.

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Условие (14) можно заменить более грубым

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k^{p+2} |a_{kj}|^2 \leq C_1 < \infty. \quad (15)$$

Теорема 4. Оператор  $F = L + A : h_p \rightarrow h_{p+2}$  является фредгольмовым.

Доказательство следует из известной теоремы о сумме обратимого и компактного операторов [6].

Перейдем к рассмотрению  $L$ -оператор-функций:

$$F(\lambda) \equiv L + A(\lambda), \quad \lambda \in G \subset \mathbb{C}, \quad (16)$$

$G$  — область (связное открытое множество).

Определение 1.  $\rho(F) = \{\lambda \mid \lambda \in G, \exists F^{-1}(\lambda) : h_{p+2} \rightarrow h_p\}$ ,  $\sigma(F) = G \setminus \rho(F)$  — соответственно резольвентное множество и спектр оператора  $F(\lambda)$ . Точки спектра будем называть характеристическими числами (х. ч.) оператор-функций  $F(\lambda)$ .

Определение 2. Оператор-функция  $F(\lambda) : h_p \rightarrow h_{p+2}$  голоморфна в точке  $\lambda_0 \in G$ , если в некоторой окрестности этой точки она представима степенным рядом

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m F_m,$$

где  $F_m : h_p \rightarrow h_{p+2}$  — ограниченные линейные операторы, не зависящие от  $\lambda$ , а сходимость ряда понимается как сходимость по норме. Если  $F(\lambda)$  голоморфна в каждой точке некоторой области  $G$ , то она называется голоморфной в  $G$ .

Определим естественные проекторы  $p_n$  и  $q_n$ :

$$\begin{aligned} p_n : h_p &\rightarrow h_p^n, & p_n(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots) &= (\xi_1, \dots, \xi_n), \\ q_n : h_{p+2} &\rightarrow h_{p+2}^n, & q_n(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \dots) &= (\eta_1, \dots, \eta_n), \end{aligned}$$

нормы в  $h_p^n$  и  $h_{p+2}^n$  индуцированы нормами в  $h_p$  и  $h_{p+2}$  и обозначаются через  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  соответственно.

Введем определения (терминология заимствована из [7]).

Определение 3. Последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n \in N'$ ,  $x_n \in h_p^n$  называется  $P$ -сходящейся к  $P$ -пределу  $x_n \in h_p^n$ , если  $\|x_n - p_n x\|_1 \rightarrow 0$ ,  $n \in N'$ ; записывают это обычным образом:  $x_n \rightarrow x$ ,  $n \in N'$ ,  $N'$  — подпоследовательность натуральных чисел  $N$ ,  $N' \subset N$ .

Определение 4. Последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n \in N'$ ,  $x_n \in h_p^n$   $P$ -компактна, если для любой  $N'' \subset N'$  существует такая  $N''' \subset N''$ , что последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n \in N'''$   $P$ -сходится к некоторому  $P$ -пределу  $x \in h_p$ .

$P$ -компактная последовательность ограничена по норме. Множество  $P$ -предельных точек  $P$ -компактной последовательности компактно в  $h_p$  (см. [7]). Аналогично понятиям  $P$ -сходимости и  $P$ -компактности вводятся понятия  $Q$ -сходимости и  $Q$ -компактности для  $h_{p+2}$  и  $h_{p+2}^n$ .

Наряду с  $F(\lambda)$  рассмотрим конечномерные «усеченные» операторы  $F_n(\lambda) : h_p^n \rightarrow h_{p+2}^n$ :

$$F_n(\lambda) \xi^n = q_n F(\lambda) (p_n \xi), \\ \xi \in h_p, p_n \xi = \xi^n \in h_p^n, \lambda \in G.$$

Здесь и далее мы не делаем различий в обозначении элементов

$$\xi^n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in h_p^n \text{ и } \xi^n = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in h_p,$$

а также в обозначении операторов

$$F_n : h_p^n \rightarrow h_{p+2}^n \text{ и } F_n : h_p \rightarrow h_{p+2},$$

где матрицы  $L$  и  $A$  дополняются нулями. О каких пространствах идет речь, будет ясно из дальнейшего.

Определение 5. Последовательность операторов  $\{A_n\}$ ,  $n \in N$  ( $A_n : h_p^n \rightarrow h_{p+2}^n$ ) собственно сходится к оператору  $A : h_p \rightarrow h_{p+2}$ , если выполнены следующие два условия:

$$x_n \in h_p^n, x_n \rightarrow x, n \in N \Rightarrow A_n x_n \rightarrow Ax, n \in N, \quad (17)$$

$$\|x_n\| \leq \text{const}, n \in N, \quad (18)$$

$\{A_n x_n\}$   $Q$ -компактна  $\Rightarrow \{x_n\}$ ,  $n \in N$   $P$ -компактна. Пусть выполнены условия (19), (20), (21) для  $F(\lambda)$ :

$$a_{ij}(\lambda) \text{ голоморфны в } G; \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \frac{i^{p+2}}{j^p} \leq C^2(\lambda), \quad (20)$$

где  $C^2(\lambda)$  равномерно ограничена на каждом компакте  $K \subset G$ ;

$$\rho(F) \neq \emptyset. \quad (21)$$

Теорема 5. Пусть для  $F(\lambda): h_p \rightarrow h_{p+2}$ ,  $\lambda \in G$  выполнены условия (19) — (21). Тогда

- ( $\alpha$ )  $\lambda_0 \in \sigma(F) \Rightarrow \exists \{\lambda_n\}: \lambda_n \in \sigma(F_n), \lambda_n \rightarrow \lambda_0, n \in N$ ;  
 ( $\beta$ )  $\lambda_n \in \sigma(F_n), \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in G, n \in N' \subset N \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(F)$ ;  
 ( $\gamma$ ) спектр  $\sigma(F)$  точечный;  
 ( $\delta$ )  $\|x_n\|_1 = 1, F_n(\lambda_n)x_n = 0, x_n \rightarrow x_0, n \in N' \subset N \Rightarrow \|x_0\|_p = 1,$   
 $A(\lambda_0)x_0 + Lx_0 = F(\lambda_0)x_0 = 0,$

где  $\lambda_n \in \sigma(F_n), \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in G$ .

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 из [7] достаточно установить, что

$F(\lambda), F_n(\lambda)$  голоморфны в  $G$ ;

$F(\lambda), F_n(\lambda)$  фредгольмовы,  $\lambda \in G$ ;

$\|A_n(\lambda)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\lambda$  на каждом компакте  $K \subset G$ ;

$F_n(\lambda) \rightarrow F(\lambda)$  собственно для любого  $\lambda \in G$ .

Голоморфность  $F(\lambda)$  и  $F_n(\lambda)$  в  $G$  следует из слабой голоморфности на фундаментальных множествах базисных элементов  $\{e_i\}$  (что эквивалентно условию (19)) и ограниченности норм  $\|F(\lambda)\|$  и  $\|F_n(\lambda)\|$  (см. [8] в разделе о голоморфных семействах операторов), которая, в свою очередь, следует из условия (20) и элементарных оценок

$$\|A_n(\lambda)\| \leq \|A(\lambda)\| \leq G(\lambda).$$

Фредгольмовость  $F(\lambda)$  и  $F_n(\lambda)$  установлена в теореме 4.

Докажем собственную сходимость  $\{A_n\}$  к  $A$ .

Пусть последовательность  $\{F_n x_n\}$   $P$ -компактна. Тогда для любого  $N' \subset N$  существует  $N'' \subset N'$  и  $y \in h_{p+2}: F_n x_n \rightarrow y, n \in N''$ ;  $F_n x_n = L_n x_n + A_n x_n \rightarrow y$ ;  $\|x_n\| < \text{const}$  для всех  $n$ . Поскольку пространство  $h_p$  гильбертово, то из ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{x_n\}, n \in N''' \subset N''$ , которую компактный оператор  $A$  переводит в сильно сходящуюся  $\{Ax_n\}, n \in N''''$ ,  $Ax_n \rightarrow u \in h_{p+2}$ . Но  $A_n x_n = Ax_n + (A_n - A)x_n$ , где  $(A_n - A)x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$  (в силу замечания к теореме 3)  $\Rightarrow A_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u \Rightarrow$

$$A_n x_n \rightarrow u, n \in N'''' \Rightarrow L_n x_n \rightarrow v = u + y, n \in N'''' \Rightarrow x_n \rightarrow L^{-1}v, n \in N''''$$

$$\text{так как } \|x_n - p_n L^{-1}v\|_1 = \|x_n - L_n^{-1} p_n v\|_1 = \|L_n^{-1}(L_n x_n - p_n v)\|_1 \leq \\ \leq \|L_n^{-1}\| \times \|L_n x_n - p_n v\|_1 = \|L_n x_n - p_n v\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Первое условие в определении собственной сходимости операторов немедленно следует из того, что

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема утверждает сходимость приближенных

х. ч. и собственных векторов оператор-функций  $F_n(\lambda)$  к точным;  $\sigma(F)$  состоит из не более чем счетного числа изолированных точек, а  $F^{-1}(\lambda)$  голоморфна на  $\rho(F)$ . Наиболее важным результатом этого параграфа является обоснование возможности расчета приближенных х. ч. оператор-функции  $F(\lambda)$  решением трансцендентного уравнения

$$\det(F_n(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in G, \quad (22)$$

где под  $F_n(\lambda)$  понимается его матрица

$$F_n(\lambda) = L_n + A_n(\lambda), \quad f_{ij} = \frac{1}{i} \delta_{ij} + a_{ij}(\lambda),$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

### § 3. Оператор-функции с логарифмической особенностью ядра в дискретных пространствах

Докажем вспомогательные утверждения.

Пусть

$$\Phi_q = \left\{ \varphi \mid \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(s) \xi_n + \frac{\xi_0}{2}, \quad \xi \in h_q \right\},$$

где  $T_n(s) = \cos(n \arccos s)$  — многочлены Чебышева I рода,

$$\xi_k \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k^q + |\xi_0|^2 < \infty, \quad q \geq 0.$$

Здесь и далее мы не будем оговаривать особо изменения, связанные с  $\xi_0$ ; обозначения для пространств и операторов останутся прежними.

Скалярное произведение в  $\Phi_q$  имеет вид

$$(\varphi, \psi)_q = (\xi, \eta)_q = \frac{\xi_0 \bar{\eta}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n n^q,$$

$$\varphi(s) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n T_n(s), \quad \psi(s) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n T_n(s).$$

Ясно, что  $\Phi_q$  изоморфно  $h_q$ .

Теорема 6.

$$\Phi_2 = \mathcal{W}_2^1 = \{ \varphi \mid \varphi \in C[-1, 1], \varphi' \in L_2([-1, 1] \sqrt{1-x^2} dx) \}.$$

Доказательство. Пусть  $\varphi \in \Phi_2$ . Тогда  $\varphi \in C[-1, 1]$ , так как

$$|T_n(s)| \leq 1, \quad \frac{|\xi_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$$

и ряд из непрерывных функций сходится равномерно. Коэффициенты  $\xi_k$  легко вычислить:

$$\xi_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_k(x) \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k \geq 0.$$

Но последовательность  $\xi_k$  такова, что

$$|\xi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\xi_n|^2 < \infty \Rightarrow$$

по теореме Рисса — Фишера [5] существует такой элемент  $f \in L_2 \left( [-1, 1] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ , что его коэффициенты Фурье по ортогональной системе функций Чебышева II рода  $U_n(x) = \sin(n \arccos x)$ ,  $n \geq 1$ , равны  $n\xi_n$ :

$$n\xi_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \geq 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} n\xi_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 nT_n(x) \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_n(x) \varphi(x) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_n(x) (\sqrt{1-x^2} \varphi(x)) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $f(x)$  интегрируема с весом

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{2} (1 + |f(x)|^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right),$$

то функция  $F(x) = \int_{-1}^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}$ , представляющая собой неопределенный интеграл суммируемой функции, абсолютно непрерывна и производная ее  $F'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  почти всюду [5].

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) F'(x) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U'_n(x) F(x) dx \Rightarrow \int_{-1}^1 U'_n(x) [\varphi(x) - F(x)] dx = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) [\varphi(x) - F(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad n \geq 1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - F(x) = \text{const} \Rightarrow F'(x) = \varphi'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{п.в.}$$

и, следовательно,

$$\varphi'(x) \in L_2([-1, 1], \sqrt{1-x^2} dx).$$

Обратно, пусть  $\varphi \in \mathcal{W}_2^1$ . Ее ряд Фурье—Чебышева

$$\varphi(s) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i T_i(s), \quad |s| \leq 1,$$

$$\xi_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(s) T_i(s) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}, \quad i \geq 0;$$

$$\sqrt{1-x^2} \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n U_n(x), \quad |x| \leq 1;$$

$$\eta_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) \varphi'(x) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n'(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{2n}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(x) \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = n \xi_n.$$

Теперь, применяя неравенство Бесселя [5] к  $\eta_n$ , получим, что  $\xi \in h_2$ . Теорема доказана.

Лемма 2.

$$\tilde{L}T_n(s) = \frac{1}{n} T_n(x), \quad n \geq 1; \quad \tilde{L}T_0 = T_0 \ln 2;$$

$$\tilde{L}\varphi = - \int_{-1}^1 \ln|x-s| \varphi(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}.$$

Доказательство. Легко проверить, что  $\tilde{L}T_0 = T_0 \ln 2$ .

Докажем, что  $\tilde{L}T_n(s)|_{x=0} = \frac{1}{n} T_n(0)$ :

$$T_n(0) = \begin{cases} 0, & u = 2k + 1, \\ (-1)^k, & n = 2k, \end{cases}$$

$$\tilde{L}T_n(s)|_{x=0} = 0,$$

при  $n = 2k + 1$  из-за нечетности  $T_n(s)$ ;

$$\begin{aligned} \widetilde{L}T_n(s)|_{x=0} &= - \int_{-1}^1 \ln |s| T_n(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}} = \\ &= -2 \int_0^1 \ln s T_n(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}} = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2ks}{k} ds = \frac{(-1)^k}{2k}, \quad n = 2k. \end{aligned}$$

Дифференцируя  $\widetilde{L}T_n$  по  $x$ , имеем (см. [9])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(x-s)\sqrt{1-s^2}} = \frac{T'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим операторное уравнение

$$L\varphi + \widetilde{N}(\lambda)\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathbb{W}_2^1; \quad (23)$$

$$\widetilde{N}(\lambda)\varphi = \int_{-1}^1 N(\lambda, x, s) \varphi(s) \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} N(\lambda, x, s) &\in C^1([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad N''_{xx}(\lambda, x, s) \in \\ &\in L_2\left([-1, 1] \times [-1, 1], \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-s^2}}\right), \quad \lambda \in G, \end{aligned} \quad (25)$$

$N(\lambda, x, s)$  — комплекснозначная функция комплексного переменного  $\lambda$  и действительных аргументов  $x, s \in [-1, 1]$ . На основании теоремы 6 имеем

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_0 T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n T_n(s), \quad \xi \in h_2. \quad (26)$$

Коэффициент при  $T_0$  изменен для удобства. Разложим непрерывную функцию  $\widetilde{N}(\lambda)\varphi$  при фиксированном  $\lambda \in G$  в ряд Фурье—Чебышева

$$\widetilde{N}(\lambda)\varphi = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i T_i(x), \quad (27)$$

$$b_k = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N(x, s) T_k(x) \varphi(s) \frac{dx ds}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-s^2}}.$$

Теперь из леммы 3, а также из (26) и (27) следует, что (23) эквивалентно (28) в  $\mathbb{W}_2^1$ :



$$\ln 2 \frac{\xi_0}{2} T_0 + \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( b_i + \frac{1}{i} \xi_i \right) T_i(x) = 0. \quad (28)$$

Ряд в левой части (28) представляет непрерывную функцию, и, следовательно, равенство нулю означает, что функция равна нулю для всех  $x \in [-1, 1]$ , а не в смысле среднего квадратичного.

Подставим в  $b_k$  выражение (26) для  $\varphi$  и, учитывая, что почленное интегрирование здесь допустимо, получим из базисности

$\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ :

$$\begin{cases} \xi_0 \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_0 = 0, \\ \frac{1}{i} \xi_i + b_i = 0, \quad i \geq 1, \end{cases} \quad (29)$$

или

$$L\xi + A(\lambda)\xi = 0, \quad \xi \in h_2, \quad \lambda \in G; \quad (30)$$

$$L(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = \left( \xi_0 \ln 2, \xi_1, \dots, \frac{1}{n} \xi_n, \dots \right),$$

$$A(\lambda)(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots),$$

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} \xi_i, \quad n \geq 0,$$

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N(\lambda, x, s) T_i(x) T_j(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}},$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j=0, \\ 2, & i \geq 1, j \geq 1, \\ \sqrt{2}, & ij=0, i \neq j. \end{cases}$$

Задача (30) эквивалентна (23).

Очевидна следующая

Лемма 3.  $a_{nm} = a_{mn}(\lambda)$  голоморфны в  $G$ .

Лемма 4. Пусть для  $N(\lambda, x, s)$  выполнены условия (25). Тогда верна оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|^2 i^4 + \sum_{j=0}^{\infty} |a_{0j}|^2 \frac{1}{(\ln 2)^2} \leq C^2(\lambda), \quad (31)$$

где

$$C^2(\lambda) = \frac{1}{(\ln 2)^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{N(\lambda, x, s) dx}{\pi \sqrt{1-x^2}} \right|^2 \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}} +$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-x^2) |(V\sqrt{1-x^2} N'_x)'_x|^2 \frac{dx ds}{\pi^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}}.$$

Доказательство. Разложим в ряд Фурье по системе  $\{T_n(x) T_m(s)\}_{n=0, m=0}^{\infty}$  функцию из

$$L_2 \left( [-1, 1] \times [-1, 1], \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} \right) - \\ - \sqrt{1-x^2} (V\sqrt{1-x^2} N'_x(\lambda, x, s))'_x = \sum_{n, m=0}^{\infty} c_{nm} T_n(x) T_m(s),$$

$$c_{nm} = - \frac{\varepsilon_{nm}^2}{\pi} \int_{-1}^1 T_m(s) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 T_n(x) (V\sqrt{1-x^2} N'_x(x, s))'_x dx = \\ = \frac{\varepsilon_{nm}^2}{\pi} \int_{-1}^1 T_m(s) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 T_n(x) (V\sqrt{1-x^2} N'_x(x, s)) dx = \\ = n \frac{\varepsilon_{nm}^2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{T_m(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 U_n(x) N'_x(x, s) dx = \\ = n^2 \frac{\varepsilon_{nm}^2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{N(x, s) T_n(x) T_m(s) dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} = n^2 \varepsilon_{nm} a_{nm},$$

$$N(x, s) = N(\lambda, x, s).$$

Из неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} n^4 \pi^2 |a_{nm}|^2 \ll \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-x^2) |(V\sqrt{1-x^2} N'_x)'_x|^2 \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}}.$$

Разложим в ряд Фурье—Чебышева функцию  $\frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 \frac{N(x, s) dx}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}}$ .

Из неравенства Бесселя аналогично рассмотренному выше будет следовать:

$$\frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 \ll \frac{1}{(\ln 2)^2} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{N(x, s) dx}{\pi \sqrt{1-x^2}} \right|^2 \frac{ds}{\pi \sqrt{1-s^2}}.$$

Лемма доказана.

Можно использовать более простые оценки второго слагаемого в константе  $C^2(\lambda)$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 \leq \left( \max_{-1 \leq x, s \leq 1} |N(\lambda, x, s)|^2 \right).$$

Таким образом, для операторного уравнения (30), эквивалентного в  $\mathbb{W}_2^1$  уравнению (23), применимы результаты, изложенные в § 1. При непустом резольвентном множестве  $\rho(F)$  верна теорема 5, и, следовательно, для вычисления приближенных х.ч. оператор-функций  $F_n(\lambda)$  достаточно решать трансцендентные уравнения (22).

Лемма 5. Если  $N(\lambda, x, s) = N_1(\lambda, x+s) + N_2(\lambda, x-s)$ , где  $N_1(\lambda, t)$ ,  $N_2(\lambda, t)$  — четные по  $t$  функции для любого  $\lambda \in G$ ,  $\rho(F) \neq \emptyset$ ,  $\rho(B) \neq \emptyset$ ,  $\rho(C) \neq \emptyset$ , то

$B: h_2 \rightarrow h_4$ ,  $b_{ij} = f_{ij}$ ,  $i$  — четное и  $j$  — четное,

$$b_{ij} = l_{ij}, \quad i = j \text{ — нечетное, } b_{ij} = 0, \text{ иначе,} \quad (32)$$

$C: h_2 \rightarrow h_4$ ,  $c_{ij} = f_{ij}$ ,  $i$  — нечетное,  $j$  — нечетное,

$$c_{ij} = l_{ij}, \quad i = j \text{ — четное, } f_{ij} = 0, \text{ иначе, } \sigma(F) = \sigma(B) \cup \sigma(C).$$

Всегда верно

$$\sigma(F_n) = \sigma(B_n) \cup \sigma(C_n).$$

Доказательство. Пусть  $f(t)$  — четная,  $g(t)$  — нечетная функции и все интегралы существуют. Тогда

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N(x+y) f(x) g(y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N(x-y) f(x) g(y) dx dy = 0.$$

Действительно, покажем, что  $h(x) = \int_{-1}^1 N(x+y) g(y) dy$  — нечетна;

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_{-1}^1 N(-x+y) g(y) dy = \\ &= \int_{-1}^1 N(-x-t) g(-t) dt = -h(x). \end{aligned}$$

Аналогично для второго интеграла. Следовательно,  $a_{ij}(\lambda) = 0$ , если  $i, j$  — разной четности. Непосредственным вычислением убеждаемся, что тогда

$$\det(F_n(\lambda)) = \det(B_n(\lambda)) \det(C_n(\lambda)),$$

откуда, учитывая непустоту  $\rho(F)$ ,  $\rho(B)$ ,  $\rho(C)$ , получаем утверждение леммы.

Доказанная лемма позволяет говорить о спектре «четных» и «нечетных» волн, а также значительно снизить объем вычислительной работы — порядок матрицы, определитель которой приходится вычислять, уменьшается вдвое.

#### § 4. Спектр щелевой линии передачи с подвешенной подложкой

До сих пор мы явно не учитывали вид ядра оператор-функции  $K_1(\lambda)$ . В этом параграфе речь пойдет конкретно о щелевой линии передачи. Выпишем явный вид коэффициентов  $f_{ij}$  оператор-функции  $F(\lambda)$  в случае (9) (см. (13), (30)):

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) \frac{e_{ij}}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi k(\omega x + a)}{2a} \sin \frac{\pi k(\omega s + a)}{2a} \times \\ \times T_i(x) T_j(s) \frac{dx ds}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) t_i^k t_j^k, \quad (33)$$

где  $\kappa = \frac{\pi \omega}{2a}$ ,

$$t_n^k = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{2} \mathcal{J}_n(k\kappa), & n \geq 1, k \text{ четно, } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2} \mathcal{J}_n(k\kappa), & n \geq 2, k \text{ нечетно, } n \text{ четно,} \\ \mathcal{J}_0(k\kappa) & n=0, k \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем непустоту резольвентного множества для  $F(\lambda)$ . Пусть  $\lambda > \varepsilon - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ . Тогда, как легко проверить,  $\alpha_n(\lambda) < 0, n \geq 1$ . Но

$$\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \left( \sum_{i=0}^{\infty} f_{ij} \xi_i \right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) t_i^k t_j^k \right) \xi_i \xi_j = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i t_i^k \right)^2 < 0, \quad \xi \in h_2. \quad (34)$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i t_i^k = \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi k(\omega s + a)}{2a} \frac{\varphi(s) ds}{\pi \sqrt{1-s^2}} = 0, \quad \varphi \in \tilde{W}_2^1, \quad (35)$$

линейные комбинации функций  $\left\{ \sin \frac{\pi n(x+a)}{2a} \right\}_1^{\infty}$  равномерно приближают на  $[-a, a]$  любую непрерывную функцию  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(-a) = \varphi(a)$  (по теореме Фейера, переходя к отрезку  $[0, \pi]$ , см. [5]), то можно любую  $\varphi \in \tilde{W}_2^1$  приблизить линейными комбинациями  $\left\{ \sin \frac{\pi k(\omega s + a)}{2a} \right\}_1^{\infty}$  в норме  $L_2 \left( [-1, 1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)$  и,

следовательно (35) не может выполняться для всех  $k \geq 1$ . Значит, правая часть в (34) меньше нуля и  $\ker F(\lambda) = \{0\}$ . Учитывая фредгольмовость  $F(\lambda)$ , заключаем, что  $\rho(F) \neq \emptyset$ . Одновременно мы доказали, что  $\rho(B) \neq \emptyset$ ,  $\rho(C) \neq \emptyset$ , где оператор-функции  $B(\lambda)$  и  $C(\lambda)$  определены в (32).

Итак, верна следующая

Лемма 6. Если  $\alpha_n(\lambda) < 0$ ,  $\lambda \in G$ ,  $\alpha_n(\lambda) \in \mathbb{R}$  для всех  $n \geq 1$ , то  $\lambda \in \rho(F)$ ,  $\lambda \in \rho(B)$ ,  $\lambda \in \rho(C)$ . В случае микрополосковой линии с диэлектрической подложкой

$$\left\{ \lambda \mid \lambda > \varepsilon - \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \in \rho(F).$$

Запишем исходную оператор-функцию  $K_1(\lambda)$  в виде

$$\begin{aligned} K_1(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) (\cdot, \psi_k) \psi_k = \alpha_1(\lambda) (\cdot, \psi_1) \psi_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k(\lambda) (\cdot, \psi_k) \psi_k = \alpha_1(\lambda) (\cdot, \psi_1) \psi_1 + \tilde{K}_1(\lambda). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \sin \frac{\pi k (ws + a)}{2a}, \\ (\varphi, \psi) &= \int_{-1}^1 \varphi(s) \psi(s) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}. \end{aligned}$$

Ясно, что оператор  $\tilde{K}_1(\lambda)$  фредгольмов, так как  $K_1(\lambda)$  фредгольмов, а  $\alpha_1(\lambda) (\cdot, \psi_1) \psi_1$  — конечномерный.

Лемма 7. Пусть  $\alpha_k(\lambda) < 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in [a, b]$  для всех  $k \geq 2$ ;  $\alpha_1(\lambda)$  принимает все вещественные значения на  $(a, b)$ ;  $\alpha_i(\lambda)$  голоморфны в  $G$ . Тогда  $\sigma(F) \neq \emptyset$ .

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (K_1(\lambda) \varphi, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\lambda) |(\varphi, \psi_k)|^2 = \alpha_1(\lambda) |(\varphi, \psi_1)|^2 + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k(\lambda) |(\varphi, \psi_k)|^2, \quad \varphi \in \tilde{W}_2^1. \end{aligned} \quad (37)$$

Если существует  $\varphi \in \tilde{W}_2^1$ , такой, что  $(\varphi, \psi_k) = 0$  для всех  $k \geq 2$ , то корни уравнения  $\alpha_1(\lambda) = 0$  являются х.ч.  $K_1(\lambda)$  ( $\varphi \neq 0$ ). В силу условий леммы хотя бы один корень существует.

Если не существует  $\varphi \in \tilde{W}_2^1$ ,  $(\varphi, \psi_k) = 0$ ,  $k \geq 2$ , то  $\ker \tilde{K}_1(\lambda) = \{0\}$ ,  $\lambda \in [a, b]$ , и, следовательно,  $\tilde{K}_1(\lambda)$ ,  $\lambda \in [a, b]$  обратим.

Подставим в (38)

$$\chi_1 = \bar{K}_1^{-1}(\lambda) \psi_1, \quad \chi_1 \neq 0,$$

$$K_1(\lambda) \chi_1 = \alpha_1(\lambda) (\chi_1, \psi_1) \psi_1 + \bar{K}_1(\lambda) \chi_1, \quad (38)$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\lambda) (\bar{K}_1^{-1}(\lambda) \psi_1, \psi_1) \psi_1 + \psi_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1(\lambda) (\chi_1, \bar{K}_1(\lambda) \chi_1) + 1 = 0 \quad (39)$$

Оператор-функция  $\bar{K}_1(\lambda)$  отрицательно определена  $(\bar{K}_1(\lambda) \varphi, \varphi) < 0$ ,  $\lambda \in [a, b]$ ,  $\varphi \in \mathbb{W}_2^1$ , и голоморфна в  $G$ . Следовательно, существуют такие константы  $h_1$  и  $h_2$ , что

$$h_1 \leq (\chi_1, \bar{K}_1(\lambda) \chi_1) \leq h_2 < 0, \quad \lambda \in [a, b]$$

и уравнение (39) разрешимо. Корни этого уравнения являются х.ч.  $F(\lambda)$ .

Указанный метод доказательства непустоты спектра может быть обобщен на случай «выделения» первых  $n$  слагаемых в (36).

Доказанная лемма позволяет гарантировать непустоту спектра для задачи (13), если

$$\frac{\pi}{2a} > \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{3}}. \quad (40)$$

Тогда  $1 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 < \lambda_0 < \varepsilon - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$ , где  $\lambda_0$  — «первое» х.ч.  $F(\lambda)$ .

В физических приложениях важно то обстоятельство, что  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , т. е. если  $\lambda_0 > 0$  — волна является незатухающей. Условие (40) — простейшее, позволяющее заключить, что  $\alpha_k(\lambda) < 0$ ,  $k \geq 2$ ;  $\alpha_1(\lambda)$  принимает все вещественные значения на

$$\left(1 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2, \varepsilon - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\right).$$

Это легко проверить, пользуясь явным выражением для  $\alpha_n(\lambda)$  в § 1.

### § 5. Численный метод и результаты расчета постоянных распространения щелевой линии со слоистым диэлектриком подложки

Для численных расчетов х.ч. использовался простейший метод, основанный на решении уравнения

$$\det(F_0(\lambda)) = \det(L_0 + A_0(\lambda)) = 0. \quad (41)$$

Выбирается нулевое приближение (оно же первое) уравнения (41) по параметру  $\kappa = \frac{\pi w}{2a}$  — относительной ширины щели; имеем

$$\ln \frac{\kappa}{2} + \frac{\pi}{1 + \varepsilon} N(\lambda, 0, 0) = 0, \quad (42)$$

где  $N(\lambda, x, s)$  имеет вид из § 1.

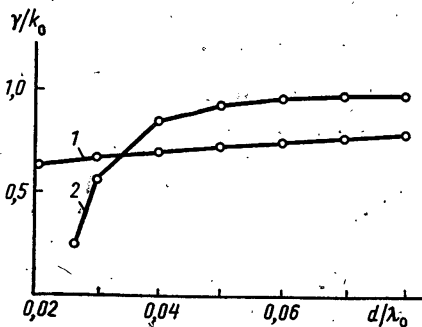


Рис. 2. Кривая 1:  $\epsilon=9,6$ ;  $w=0,2 d$ ;

$$a = \frac{13}{8} b_1; b_2 = b_1, b_1 = \frac{0,24}{1,27} \lambda_0;$$

кривая 2:  $\epsilon=9,6$ ;  $w=0,5$ ;  $a = \frac{13}{8} b_1$ ;

$$b_2 = b_1, b_1 = \frac{8}{1,27} d$$

## ЛИТЕРАТУРА

- Ильинский А. С., Шестопапов Ю. В. Математические модели для задачи распространения волн в микрополосковых устройствах. — В сб.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980, вып. 32.
- Ильинский А. С., Чернокожин Е. В., Шестопапов Ю. В. Развитие метода операторных уравнений для решения задачи о собственных волнах связанных микрополосковых линий со слоистым диэлектриком подложки. — В кн.: Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 116—136.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
- Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
- Пич А. Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
- Вайникко Г. М., Карма О. О. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1974, т. 14, № 4.
- Като Т. Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
- Шестопапов Ю. В. Существование дискретного спектра нормальных волн микрополосковых линий передачи со слоистым диэлектрическим заполнением. — Докл. АН СССР, 1984, т. 273, № 3, с. 592—596.
- Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
- Дерюгин Л. Н., Курдюмов О. А., Сотин В. Е. Основные и паразитные типы волн экранированной микрополосковой линии. — Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, № 1, с. 118—128.
- Ильинский А. Г. Обоснование расчета собственных волн микрополосковой линии передачи. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1868—1874.

Метод нулевого приближения обоснован в работе [10] для достаточно малых  $\kappa$ . Большим достоинством данного метода является простота реализации. Здесь не приходится «решать» на ЭВМ уравнение (42), так как оно разрешимо относительно  $\kappa$ :

$$\kappa(\lambda) = 2 \exp\left(-\frac{\pi}{1+\epsilon} N(\lambda, 0, 0)\right). \quad (43)$$

Метод верен лишь для малых  $\kappa$ .

Ниже приводятся результаты расчета  $\kappa$ , ч. в зависимости от различных параметров линии (рис. 1, 2).

## МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

При исследовании строения слоистой Земли широко применяются методы, основанные на использовании электромагнитных полей. Среди них важное место занимает метод, в котором используются данные о естественном поле Земли, — метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ). В работе [2] А. Н. Тихоновым доказана теорема единственности решения соответствующей обратной задачи для горизонтально-однородной слоистой среды, а в работе [10] доказана теорема единственности решения обратной задачи в случае  $E$ -поляризации для двумерно-неоднородной среды, в которой проводимость меняется только по двум координатам,  $y$  и  $z$ , а ось  $x$  является осью однородности среды (рис. 1).

В работах [3—5] развит градиентный метод минимизации сглаживающего функционала Тихонова [8] при решении обратной задачи МТЗ в случае  $E$ -поляризации. В настоящей статье рассмотрен алгоритм решения обратной задачи МТЗ для случая  $E$ -поляризации, основанный на минимизации сглаживающего функционала Тихонова с помощью метода линеаризации

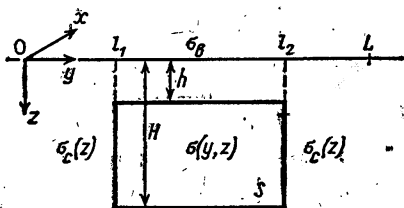


Рис. 1

с помощью метода линеаризации [6—7], который в окрестности решения имеет более высокую скорость сходимости, чем градиентные методы.

Пусть  $P = (y, z)$  — точка плоскости  $\mathcal{P} = \{(y, z) : -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$ . Будем считать, что в горизонтально-однородной слоистой среде с проводимостью  $\sigma_c(P)$ , зависящей только от  $z$ , расположена область  $S = \{(y, z) : 0 \leq l_1 < y < l_2 \leq L, 0 \leq h < z < H\}$  с двумерным распределением проводимости  $\sigma(P)$ , которую надо определить, причем  $0 < \sigma_1 \leq \sigma_{\min}(P) \leq \sigma_2(P) \leq \sigma_{\max}(P) \leq \sigma < \infty$ . Над этой средой при  $z \leq 0$  имеется пространство (воздух) с очень малой проводимостью  $\sigma_b$ .

Среду считаем магнитооднородной, т. е. магнитная проницаемость среды постоянна и равна магнитной проницаемости вакуума ( $\mu = \mu_0$ ). Зависимость от времени берем в виде  $e^{-i\omega t}$ . Токами смещения пренебрегаем. Внешнее поле аппроксимируем полем плоской волны, нормально падающей на земную поверхность.

Как показано в работе [10], распределение двумерной проводимости Земли однозначно определяется частотными характеристиками двух импедансов на земной поверхности при  $z = 0$ :

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{i\omega\mu E_x}{\partial E_x / \partial z}, \quad Z_0 = \frac{E_x}{H_z} = -\frac{i\omega\mu E_x}{\partial E_x / \partial y}. \quad (1)$$



Пусть  $E_x^c(P)$  — зависящая только от  $z$  электрическая компонента  $E$ -поляризованного поля, возбуждаемого плоской падающей волной в горизонтально-однородной слоистой среде с проводимостью  $\sigma_c(P)$ , причем падающая волна такова, что выполняется условие  $E_x^c|_{z=0} = 1$ . Такая нормировка удобна при численных расчетах с использованием ЭВМ. Как показано в [1], электрическая компонента  $E_x(P)$   $E$ -поляризованного поля, возбуждаемого такой же падающей волной в области  $S$  с двумерным распределением проводимости  $\sigma(P)$ , удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма II рода:

$$E_x(P) + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] E_x(P_0) ds_{P_0} = E_x^c(P), \quad (2)$$

где  $G_c(P, P_0)$  — функция Грина горизонтально-однородной слоистой среды с проводимостью  $\sigma_c$ , которая внутри областей непрерывности проводимости  $\sigma_c$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 G_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_c}{\partial z^2} + i\omega\mu\sigma_c(P) G_c = -i\omega\mu\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

непрерывна по переменной  $P$ , имеет непрерывную по  $P$  первую производную  $\frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z}$  на границах областей непрерывности проводимости  $\sigma_c$  и удовлетворяет условию излучения на бесконечности. Эта функция имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Метод расчета функции  $G_c(P, P_0)$  рассмотрен в работе [1].

Наряду с функцией Грина  $G_c$  горизонтально-однородной слоистой среды с проводимостью  $\sigma_c$  в дальнейшем потребуется функция Грина  $G$  двумерно-неоднородной среды с проводимостью  $\sigma_\infty$ :

$$\sigma_\infty(P) = \begin{cases} \sigma_c(P) & \text{при } P \notin \bar{S}, \\ \sigma(P) & \text{при } P \in S, \end{cases}$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + i\omega\mu\sigma_\infty(P) G = -i\omega\mu\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

непрерывна по переменной  $P$ , имеет непрерывную по  $P$  первую производную  $\frac{\partial G(P, P_0)}{\partial \nu_P}$  на границах областей непрерывности проводимости  $\sigma_\infty$ , где  $\nu$  — нормаль к границе, и удовлетворяет условию излучения на бесконечности. Как и функция  $G_c$ , эта функция имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов.

Обратная задача расчета проводимости  $\sigma$  по заданным при  $0 < y < L$  импедансам  $Z$  и  $Z_0$  некорректна, поэтому решение обратной задачи будем находить с помощью минимизации сглаживающего функционала Тихонова  $M^\alpha[\sigma] = I[\sigma] + \alpha\Omega[\sigma]$ , включающего наряду с функционалом невязки  $I[\sigma]$  стабилизирующий функцио-

нал  $\Omega[\sigma] = \|\sigma - \sigma_0\|^2$ , где  $\sigma_0$  — нулевое приближение к решению, а  $\|\cdot\|$  — норма в пространстве функций, принимающих на множестве  $S$ , вообще говоря, комплексные значения, которая порождается скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S u(P) \bar{v}(P) dsP \quad (3)$$

по формуле

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (4)$$

Здесь  $\bar{v}$  обозначает число, комплексно-сопряженное числу  $v$ .

Наряду со скалярным произведением (3) и нормой (4) в дальнейшем потребуются скалярное произведение  $(u, v)_1 = \int_0^L u(y) \bar{v}(y) dy$  в пространстве заданных при  $0 < y < L$  функций, а также порождаемая им норма  $\|u\| = \sqrt{(u, u)_1}$ .

Рассмотрим теперь функционал невязки  $I[\sigma]$ . По модельному полю  $E_x$ , найденному из интегрального уравнения (2), согласно формулам (1) определим модельные импедансы  $Z$  и  $Z_0$ . Экспериментальные данные  $Z(y, \omega)$  и  $Z_0(y, \omega)$  получаются при различных  $y$  и  $\omega$  с различной точностью, причем, чем больше значения  $|Z|$  и  $|Z_0|$ , тем больше и ошибка измерений. Поэтому оценивать надо не близость функций  $Z$ ,  $Z_0$  и функций  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{Z}_0$ , а близость их логарифмов. Кроме того, если измерения обоих импедансов равноточны, то оценивать близость модельных и измеренных импедансов надо таким образом, чтобы разность между логарифмом модельного импеданса  $Z$  и логарифмом измеренного импеданса  $\tilde{Z}$ , а также разность между логарифмом модельного импеданса  $Z_0$  и логарифмом измеренного импеданса  $\tilde{Z}_0$  давали бы равноценный вклад в невязку, даже если величины  $\ln \tilde{Z}$  и  $\ln \tilde{Z}_0$  по модулю сильно отличаются. Поэтому функционал невязки построим на основе величины

$$\gamma \|\ln Z - \ln \tilde{Z}\|_1^2 + \gamma_0 \|\ln Z_0 - \ln \tilde{Z}_0\|_1^2,$$

$$\text{где } \gamma = 1/\|\ln \tilde{Z}\|_1^2, \quad \gamma_0 = 1/\|\ln \tilde{Z}_0\|_1^2.$$

Обычно на практике при интерпретации пользуются не периодом колебаний  $T = 2\pi/\omega$ , а параметром  $\tau = \ln T$ , благодаря чему вклад в невязку от измеренных значений полей на разных периодах становится равноценным. Если входные данные известны при  $\tau \in (\tau_{\min}, \tau_{\max})$ , то в качестве функционала невязки естественно взять функционал

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \{ \gamma \|\ln Z - \ln \tilde{Z}\|_1^2 + \gamma_0 \|\ln Z_0 - \ln \tilde{Z}_0\|_1^2 \} d\tau = \\ & = \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \frac{1}{T} \{ \gamma \|\ln Z - \ln \tilde{Z}\|_1^2 + \gamma_0 \|\ln Z_0 - \ln \tilde{Z}_0\|_1^2 \} dT. \end{aligned}$$

Поскольку на практике входные данные известны при  $N$  значениях  $T_i \in (T_{\min}, T_{\max})$ , то функционал невязки зададим в виде

$$I[\sigma] = \sum_{i=1}^N b_i \left\{ \gamma(T_i) \left\| \ln \frac{Z(T_i)}{\bar{Z}(T_i)} \right\|_1^2 + \gamma_0(T_i) \left\| \ln \frac{Z_0(T_i)}{\bar{Z}_0(T_i)} \right\|_1^2 \right\} \approx \\ \approx \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \frac{1}{T} \left\{ \gamma \left\| \ln \frac{Z}{\bar{Z}} \right\|_1^2 + \gamma_0 \left\| \ln \frac{Z_0}{\bar{Z}_0} \right\|_1^2 \right\} dT,$$

где  $b_i$  — коэффициенты квадратной формулы с узлами в точках  $T_i$  для интеграла с весом  $1/T$  от функции

$$\gamma(T) \left\| \ln \frac{Z(T)}{\bar{Z}(T)} \right\|_1^2 + \gamma_0(T) \left\| \ln \frac{Z_0(T)}{\bar{Z}_0(T)} \right\|_1^2.$$

Для минимизации сглаживающего функционала  $M^\alpha[\sigma]$  на выпуклом замкнутом множестве  $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \{\sigma(P) : \sigma_{\min}(P) \leq \sigma(P) \leq \sigma_{\max}(P)\},$$

используем метод линеаризации [6—7], в котором последовательность итераций строится из проекций на множество  $\mathfrak{M}$  экстремалей квадратичных функционалов:

$$M_j^\alpha[\sigma] = I_j[\sigma] + \alpha \Omega[\sigma],$$

где

$$I_j[\sigma] = I_j[\sigma_j + \delta\sigma] = \sum_{i=1}^N b_i \left\{ \gamma(T_i) \left\| \ln Z(T_i, \sigma_j) + D \ln Z - \ln \bar{Z}(T_i) \right\|_1^2 + \right. \\ \left. + \gamma_0(T_i) \left\| \ln Z_0(T_i, \sigma_j) + D \ln Z_0 - \ln \bar{Z}_0(T_i) \right\|_1^2 \right\},$$

$\sigma_j$  — значение проводимости, полученное при минимизации сглаживающего функционала на предыдущей итерации;  $D \ln Z$  — дифференциал Фреше оператора  $\ln Z(T_i, \sigma)$  при  $\sigma = \sigma_j$  и вариации проводимости, равной  $\delta\sigma$ ;  $D \ln Z_0$  — дифференциал Фреше оператора  $\ln Z_0(T_i, \sigma)$ .

Как известно [11], отображение является дифференцируемым по Гато в некоторой точке, если оно дифференцируемо по Фреше в этой точке, причем операторы, являющиеся производной Гато и Фреше, равны. Поэтому дифференциал Фреше будем находить через дифференциал Гато, вычисление которого технически более просто.

Для вычисления дифференциалов операторов  $\ln Z$  и  $\ln Z_0$  найдем сначала дифференциал Гато оператора  $E_x(\sigma)$ , который по определению равен

$$DE_x(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} E_x(\sigma + t\delta\sigma) |_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_x(\sigma + t\delta\sigma) - E_x(\sigma)}{t}.$$

Функция  $E_x$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta E_x + i\omega\mu\sigma(P)E_x = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо  $\sigma$  выражение  $\sigma + \delta\sigma$  и дифференцируя затем это уравнение по  $t$ , получим уравнение для дифференциала Гаусса оператора  $E_x(\sigma)$ :

$$\Delta \frac{\partial E_x}{\partial t} + i\omega\mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = -i\omega\mu E_x \delta\sigma,$$

откуда следует соотношение

$$DE_x = \frac{\partial E_x}{\partial t} \int_S G(P, P_0) E_x(P_0) \delta\sigma(P_0) dS_{P_0}. \quad (5)$$

Продифференцировав это соотношение по  $z$  и по  $y$ , получим выражения для дифференциалов операторов  $\frac{\partial E_x}{\partial z}$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial y}$ :

$$D \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \int_S \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial z} E_x(P_0) \delta\sigma(P_0) dS_{P_0}, \quad (6)$$

$$D \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \int_S \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial y} E_x(P_0) \delta\sigma(P_0) dS_{P_0}. \quad (7)$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} D \ln Z &= \frac{1}{E_x} \left( DE_x = \frac{Z}{i\omega\mu} D \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad D \ln Z_0 = \\ &= \frac{1}{E_x} \left( DE_x + \frac{Z_0}{i\omega\mu} D \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в соотношения (8) выражения (5) — (7) для  $DE_x$ ,  $D \frac{\partial E_x}{\partial z}$  и  $D \frac{\partial E_x}{\partial y}$ , получим

$$D \ln Z = \frac{1}{E_x(P)} \int_S \left\{ G(P, P_0) - \frac{Z(P)}{i\omega\mu} \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial z} \right\} E_x(P_0) \delta\sigma(P_0) dS_{P_0},$$

$$D \ln Z_0 = \frac{1}{E_x(P)} \int_S \left\{ G(P, P_0) + \frac{Z_0(P)}{i\omega\mu} \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial y} \right\} E_x(P_0) \delta\sigma(P_0) dS_{P_0}.$$

Определим интегральные операторы  $A$  и  $B$  по формулам

$$Av = \int_S R(P, P_0) v(P_0) dS_{P_0}, \quad Bv = \int_S Q(P, P_0) v(P_0) dS_{P_0},$$

где

$$\begin{aligned} R(P, P_0) &= \frac{E_x(P_0)}{E_x(P)} \left\{ G(P, P_0) - \frac{Z(P)}{i\omega\mu} \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial z} \right\}, \\ Q(P, P_0) &= \frac{E_x(P_0)}{E_x(P)} \left\{ G(P, P_0) + \frac{Z_0(P)}{i\omega\mu} \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

тогда для дифференциалов операторов  $\ln Z(\sigma)$  и  $\ln Z_0(\sigma)$  получим следующие выражения:

$$D \ln Z = A \delta \sigma, \quad D \ln Z_0 = B \delta \sigma.$$

С использованием введенных обозначений для квадратичного функционала  $M_j^\alpha[\sigma_j + \delta\sigma]$  получим выражение

$$M_j^\alpha[\sigma_j + \delta\sigma] = \sum_{i=1}^N b_i \{ \gamma(T_i) \|A \delta \sigma - \ln \tilde{Z}/Z\|_i^2 + \gamma_0(T_i) \|B \delta \sigma - \ln \tilde{Z}_0/Z_0\|_i^2 \} + \alpha \|\sigma_j + \delta\sigma - \sigma_0\|^2. \quad (9)$$

Минимум этого квадратичного функционала достигается при  $\delta\sigma$ , являющемся решением следующего уравнения:

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^N b_i \{ \gamma(T_i) A^* [A \delta \sigma - \ln \tilde{Z}/Z] + \gamma_0(T_i) B^* [B \delta \sigma - \ln \tilde{Z}_0/Z_0] \} + \alpha (\sigma_j + \delta\sigma - \sigma_0) = 0, \quad (10)$$

где  $A^*$  и  $B^*$  — операторы, сопряженные операторам  $A$  и  $B$  в смысле

$$(A v, w)_1 = (v, A^* w), \quad (B v, w)_1 = (v, B^* w).$$

Поскольку

$$A^* w(y_1) = \int_0^L \bar{R}(y_1, P) w(y_1) dy_1, \quad B^* w(y_1) = \int_0^L \bar{Q}(y_1, P) w(y_1) dy_1,$$

то

$$A^* A \delta \sigma = \int_S \left\{ \int_0^L \bar{R}(y_1, P) R(y_1, P_0) dy_1 \right\} \delta \sigma(P_0) ds_{P_0},$$

$$B^* B \delta \sigma = \int_S \left\{ \int_0^L \bar{Q}(y_1, P) Q(y_1, P_0) dy_1 \right\} \delta \sigma(P_0) ds_{P_0}.$$

Введем обозначение

$$K(P, P_0) = \operatorname{Re} \int_0^L \{ \gamma \bar{R}(y_1, P) R(y_1, P_0) + \gamma_0 \bar{Q}(y_1, P) Q(y_1, P_0) \} dy_1,$$

тогда уравнение (10) примет вид

$$\int_S \left\{ \sum_{i=1}^N b_i K(P, P_0, T_i) \right\} \delta \sigma(P_0) ds_{P_0} + \alpha \delta \sigma(P) =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{i=1}^N b_i \int_0^L \{ \gamma(T_i) \bar{R}(y_1, P) \ln \tilde{Z}(y_1)/Z(y_1) +$$

$$+ \gamma_0(T_i) \bar{Q}(y_1, P) \ln \tilde{Z}_0(y_1)/Z_0(y_1) \} dy_1 + \alpha [\sigma_0(P) - \sigma_j(P)].$$

Решив это уравнение, найдем  $\delta\sigma$  и затем  $\sigma_{j+1}$  по формуле

$$\sigma_{j+1} = \mathcal{P}_{\mathfrak{M}}(\sigma_j + \delta\sigma),$$

где  $\mathcal{P}_{\mathfrak{M}}$  — оператор проектирования на множество  $\mathfrak{M}$ .

Параметр регуляризации  $\alpha$  определим с помощью рассмотренной в работе [9] процедуры, в которой параллельно осуществляется минимизация сглаживающего функционала и оптимизация параметра регуляризации.

Зададим последовательность значений параметра регуляризации  $\{\alpha_k, k=0, 1, 2, \dots\}$ , убывающую по закону геометрической прогрессии  $\alpha_{k+1} = p\alpha_k$ ,  $0 < p < 1$ , которая начинается с заведомо большой величины  $\alpha_0$ . Для каждого номера  $k_z$  исходя из начального приближения  $\sigma_0(\alpha_k)_z$  построим последовательность  $\{\sigma_j = \sigma_j(\alpha_k), j=0, 1, \dots, n\}$ , минимизирующую функционал  $M^{\alpha_k}$ . Для  $n$ -го элемента  $\sigma_n(\alpha_k)$  этой последовательности должно выполняться условие стабилизации  $\|\sigma_n - \sigma_{n-1}\| \leq \varepsilon \|\sigma_n\|$ , где  $\varepsilon$  — некоторая достаточно малая положительная величина. Функцию  $\sigma(\alpha_k) = \sigma_n(\alpha_k)$  используем в качестве нулевого приближения при выборе следующего значения  $\alpha_{k+1}$  параметра регуляризации. Квазиоптимальным является значение параметра регуляризации  $\alpha_{k_0}$ , для которого элемент  $\|\sigma(\alpha_{k_0+1}) - \sigma(\alpha_{k_0})\|$  последовательности  $\{\|\sigma(\alpha_{k+1}) - \sigma(\alpha_k)\|\}$  минимален.

Для реализации рассмотренного метода решения обратной задачи необходимо вычислять функцию Грина  $G(P, P_0)$  и ее производные  $\frac{\partial G(P, P_0)}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial G(P, P_0)}{\partial y}$  при  $z=0$  и  $P_0 \in S$ . Согласно принципу взаимности  $G(P, P_0)|_{z=0} = G(P_0, P)|_{z=0}$ ,

$$\left. \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial G(P_0, P)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial y} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial G(P_0, P)}{\partial y} \right|_{z=0},$$

поэтому функции  $G(P_0, P)$ ,  $\frac{\partial G(P_0, P)}{\partial z}$  и  $\frac{\partial G(P_0, P)}{\partial y}$  надо вычислять при  $P_0 \in S$  для случая, когда источник расположен на земной поверхности.

Представим функцию  $G(P, P_1)$  в виде

$$G(P, P_1) = G_c(P, P_1) + v_1(P, P_1).$$

Функция  $v_1(P, P_1)$  удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма II рода

$$v_1(P, P_1) + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_c(P_0) - \delta(P_0)] v_1(P_0, P_1) ds_{P_0} = f_1(P, P_1), \quad (11)$$

где

$$f_1(P, P_1) = - \int_S G_c(P, P_0) G_c(P_0, P_1) [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] ds_{P_0}.$$

Введем обозначения

$$v_2(P, P_1) = \frac{\partial v_1(P, P_1)}{\partial z_1}, \quad v_3(P, P_1) = \frac{\partial v_1(P, P_1)}{\partial y_1},$$

тогда для вычисления функций  $\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial z_1}$  и  $\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial y_1}$  получим формулы

$$\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial G_c(P, P_1)}{\partial z_1} + v_2(P, P_1),$$

$$\frac{\partial G(P, P_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial G_c(P, P_1)}{\partial y_1} + v_3(P, P_1).$$

Продифференцировав обе части уравнения (11) по  $z_1$  и по  $y_1$ , получим интегральные уравнения Фредгольма II рода для определения  $v_2(P, P_1)$  и  $v_3(P, P_1)$ :

$$v_i(P, P_1) + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_c(P_0) - \delta(P_0)] v_i(P_0, P_1) ds_{P_0} = f_i(P, P_1), \quad (12)$$

$$i = 2, 3,$$

где

$$f_2(P, P_1) = - \int_S G_c(P, P_0) \frac{\partial G_c(P_0, P_1)}{\partial z_1} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] ds_{P_0},$$

$$f_3(P, P_1) = - \int_S G_c(P, P_0) \frac{\partial G_c(P_0, P_1)}{\partial y_1} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] ds_{P_0}.$$

Уравнения (11)–(12) надо решать при  $P_1 \in \{(y_1, z_1) : 0 < y_1 < L, z_1 = 0\}$ .

Существенно сократить время решения обратной задачи можно, если искать функцию  $\sigma(P)$  в параметрическом виде:

$$\sigma(P) = \varphi(P, W),$$

где  $W$  — вектор вещественных параметров небольшой размерности  $n$ . Благодаря тому что число неизвестных  $W_r, r = 1, 2, \dots, n$ , в рассматриваемом случае невелико, задача становится более устойчивой, а число итераций, необходимых для минимизации сглаживающего функционала, уменьшается. Удачную параметризацию можно задать, используя дополнительную априорную информацию.

Стабилизирующий функционал зададим в виде

$$\Omega[W] = \sum_{r=1}^n (W_r - W_r^0)^2,$$

где  $W_0$  — нулевое приближение к решению. Поскольку  $D\sigma = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial W_r} \Delta W_r$  (здесь  $\Delta W$  — приращение вектора параметров  $W$ ), то аналогично тому, как это делалось при выводе формулы (9),

для квадратичного функционала  $M_j^\alpha [W^j + \Delta W]$  получим выражение.

$$M_j^\alpha [W^j + \Delta W] = \sum_{i=1}^N b_i \left\{ \gamma(T_i) \left\| A \left( \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial W_r} \Delta W_r \right) - \ln \tilde{Z}/Z \right\|_1^2 + \right. \\ \left. + \gamma_0(T_i) \left\| B \left( \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial W_r} \Delta W_r \right) - \ln \tilde{Z}_0/Z_0 \right\|_1^2 \right\} + \alpha \sum_{r=1}^n (W_r^j + \Delta W_r - W_r^0)^2.$$

Минимум этого квадратичного функционала достигается при  $\Delta W$ , являющемся решением следующего уравнения:

$$\hat{C} \Delta W + \alpha \Delta W = F,$$

где

$$\hat{C} = [c_{rr_0}], \quad 1 \leq r \leq n, \quad 1 \leq r_0 \leq n, \\ c_{rr_0} = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^N b_i \{ \gamma(T_i) (g_r, g_{r_0}) + \gamma_0(T_i) (q_r, q_{r_0}) \},$$

$$F_r = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^N b_i \{ \gamma(T_i) (g_r, \ln \tilde{Z}/Z)_1 + \gamma_0(T_i) (q_r, \ln \tilde{Z}_0/Z_0)_1 \} + \alpha (W_r^0 - W_r^j),$$

$$g_r(y) = A \frac{\partial \varphi}{\partial W_r}, \quad q_r(y) = B \frac{\partial \varphi}{\partial W_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Если количество  $n$  параметров невелико и меньше, чем утреннее число точек по профилю, в которых измерен импеданс, то более выгоден по затратам машинного времени алгоритм вычисления функций  $g_r(y)$  и  $q_r(y)$ , в котором не используются функция  $G(P, P_0)$  и ее производные. Выражение для дифференциала Гаго оператора  $E_x(\sigma)$  в этом случае получим на основе уравнения (2). Подставляя в это уравнение вместо  $\sigma$  выражение  $\sigma + t\delta\sigma$  и дифференцируя его по  $t$ , получим

$$\left. \frac{\partial E_x(P, t)}{\partial t} \right|_{t=0} + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_0(P_0) - \sigma(P_0)] \left. \frac{\partial E_x(P_0, t)}{\partial t} \right|_{t=0} ds_{P_0} = \\ = \int_S G_c(P, P_0) E_x(P_0, t) |_{t=0} \delta\sigma(P_0) ds_{P_0}. \quad (13)$$

Введем обозначения

$$A\sigma = v(P) + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] v(P_0) ds_{P_0},$$

$$B\sigma = \int_S G_c(P, P_0) E_x(P_0) v(P_0) ds_{P_0},$$



тогда уравнение (13) примет вид  $A \frac{\partial E_x}{\partial t} = B \delta \sigma$ , откуда

$$DE_x = A^{-1} B \delta \sigma. \quad (14)$$

Дифференцируя уравнение (13) по  $y$  и по  $z$ , получили

$$D \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial y} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] A^{-1} B \delta \sigma ds_{P_0} + \\ + \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial y} E_x(P_0) \delta \sigma ds_{P_0}, \quad (15)$$

$$D \frac{\partial E_x}{\partial z} = - \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] A^{-1} B \delta \sigma ds_{P_0} + \\ + \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z} E_x(P_0) \delta \sigma ds_{P_0}. \quad (16)$$

Подставляя в выражения (14) — (16) вместо  $\delta \sigma$  величину

$$D \sigma = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi(P, W)}{\partial W_r} \Delta W_r, \text{ получим}$$

$$DE_x = \sum_{r=1}^n \psi_r(P) \Delta W_r, \quad D \frac{\partial E_x}{\partial y} = \sum_{r=1}^n \Delta W_r \xi_r(y), \quad D \frac{\partial E_x}{\partial z} = \sum_{r=1}^n \Delta W_r \zeta_r(y),$$

где  $\psi_r(P)$  является решением интегрального уравнения Фредгольма II рода:

$$\psi_r(P) + \int_S G_c(P, P_0) [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] \psi_r(P_0) ds_{P_0} = \\ = \int_S G_c(P, P_0) E_x(P_0) \frac{\partial \varphi(P_0, W)}{\partial W_r} ds_{P_0}, \quad (17)$$

а  $\xi_r(P)$  и  $\zeta_r(P)$  выражаются через функцию  $\psi_r(P)$  по формулам

$$\xi_r(y) = - \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial y} \Big|_{z=0} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] \psi_r(P_0) ds_{P_0} + \\ + \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} E_x(P_0) \frac{\partial \varphi(P_0, W)}{\partial W_r} ds_{P_0}, \\ \zeta_r(y) = - \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} [\sigma_c(P_0) - \sigma(P_0)] \psi_r(P_0) ds_{P_0} + \\ + \int_S \frac{\partial G_c(P, P_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} E_x(P_0) \frac{\partial \varphi(P_0, W)}{\partial W_r} ds_{P_0}.$$

Используя формулы (8), будем иметь

$$d \ln Z = \sum_{r=1}^n \Delta W_r g_r(y), \quad d \ln Z_0 = \sum_{r=1}^n \Delta W_r q_r(y),$$

где

$$g_r(y) = \frac{1}{E_x} \left[ \psi_r(P) - \frac{Z(P)}{i\omega\mu} \xi_r(y) \right] \Big|_{z=0},$$

$$q_r(y) = \frac{1}{E_x} \left[ \psi_r(P) + \frac{Z_0(P)}{i\omega\mu} \xi_r(y) \right] \Big|_{z=0}.$$

Таким образом, при решении обратной задачи требуется находить решения интегральных уравнений Фредгольма II рода (2), (11), (12) или (2), (17), которые имеют вид

$$u(P) - \int_S G_c(P, P_0) [\sigma(P_0) - \sigma_c(P_0)] u(P_0) ds_{P_0} = f(P), \quad (18)$$

где  $\sigma = \sigma_{j+1} = \sigma_j + \delta\sigma$ ;  $\delta\sigma$  мало, а решение уравнения (18) при  $\sigma = \sigma_j$  известно. В случае уравнения (2) правая часть от  $\sigma$  не зависит. Поскольку  $\delta\sigma$  мало, то решение уравнения (18) при  $\sigma = \sigma_{j+1}$  мало отличается от решения уравнения (18) при  $\sigma = \sigma_j$ . Поэтому вычислять функцию  $u(P)$  при  $\sigma = \sigma_{j+1}$  целесообразно с помощью итерационного метода решения уравнения (18), причем в качестве начального приближения к решению брать значение  $u$  при  $\sigma = \sigma_j$ .

Введем обозначения

$$Du = (\sigma - \sigma_c)u, \quad Au = - \int_S G_c(P, P_0) u(P_0) ds_{P_0}, \quad Eu = u,$$

тогда уравнение (18) примет вид

$$(E + AD)u = f. \quad (19)$$

Решение этого уравнения является и решением уравнения

$$u = u - \tau_{k+1} \{ (E + A^*D) [(E + AD)u - f] \}, \quad (20)$$

где  $\tau_{k+1}$  — итерационный параметр, который в дальнейшем определим;  $A^*$  — оператор, сопряженный оператору  $A$  в смысле  $(Av, w) = (v, A^*w)$ :

$$A^*v = - \int_S \bar{G}_c(P_0, P) v(P_0) ds_{P_0}.$$

Итерационный процесс определим по формуле

$$u_{k+1} = u_k - \tau_{k+1} \{ (E + A^*D) [(E + AD)u_k - f] \}, \quad (21)$$

а погрешность  $z_k$  — по формуле

$$z_k = u - u_k,$$

где  $u$  — точное решение уравнения (20),  $u_k$  — приближение к решению после  $k$  итераций.

Вычитая из уравнения (21) уравнение (20), получим соотношение для погрешности:

$$z_{k+1} = [E - \tau_{k+1} (E + A^*D) (E + AD)] z_k.$$

Пусть выполняется соотношение  $\sigma > \sigma_0$ . Тогда, полагая  $z_k = D^{-1/2} x_k$ , перейдем к уравнению для эквивалентной погрешности  $x_k$ :

$$x_{k+1} = [E - \tau_{k+1} D^{1/2} (E + A^*D) (E + AD) D^{-1/2}] x_k.$$

Поскольку

$$D^{1/2} (E + A^*D) (E + AD) D^{-1/2} = (E + D^{1/2} A D^{1/2})^* (E + D^{1/2} A D^{1/2}),$$

то

$$x_{k+1} = S_{k+1} x_k, \quad S_{k+1} = E - \tau_{k+1} C^* C, \quad (22)$$

где  $C = E + D^{1/2} A D^{1/2}$ . В силу сделанной замены справедливо равенство

$$\|x_k\| = \|D^{1/2} z_k\|,$$

поэтому задача исследования сходимости итерационного метода (21) сводится к изучению числовой последовательности  $\|x_k\|$ .

Найдем решение уравнения (22). Из (22) получим

$$x_k = T_k x_0, \quad T_k = \prod_{i=1}^k S_i = S_k S_{k-1} \dots S_1.$$

Отсюда вытекает следующая оценка для нормы  $x_k$ :

$$\|x_k\| \leq \|T_k\| \|x_0\|.$$

Оператор  $C^*C$  — самосопряжен. Пусть  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_2$  — его границы, т. е.

$$\gamma_1 E \leq C^*C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \quad (23)$$

Из определения оператора  $T_k$  и условий (23) следует, что оператор  $T_k$  самосопряжен и норма операторного полинома  $T_n$  оценивается следующим образом:

$$\|T_n\| \leq \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} \left| \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t) \right|.$$

Итерационные параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  должны быть выбраны так, чтобы максимум модуля полинома  $P_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t)$  на отрезке

$[\gamma_1, \gamma_2]$  был минимальным.

Тогда для погрешности метода (21) будет верна оценка

$$\|x_n\| \leq q_n \|x_0\|, \quad \text{где } q_n = \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} |P_n(t)|.$$

Решение задачи об оптимальном выборе параметров хорошо известно [12]:

$$\tau_k = \tau_0 / (1 + \rho_0 \mu_k), \quad \mu_k \in \mathfrak{B}_n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

а через  $\mathfrak{M}_n$  обозначено множество корней полинома Чебышева  $T_n(x)$ :

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ -\cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Здесь  $\mu_k \in \mathfrak{M}_n$  означает, что в качестве  $\mu_k$  должны выбираться последовательно все элементы множества  $\mathfrak{M}_n$ . Вопрос об упорядочении множества  $\mathfrak{M}_n$  для обеспечения вычислительной устойчивости метода рассмотрен в работе [12]. При указанных значениях итерационных параметров

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}.$$

Число итераций получим из неравенства  $q_n \leq \varepsilon$ :

$$n \geq n_0(\varepsilon), \quad n_0(\varepsilon) = \ln \frac{2}{3} / \ln \frac{1}{\rho_1}. \quad (24)$$

Найдем границы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в условиях (23).

**Теорема.** Если  $\sigma(P)$  и  $\sigma_c(P)$  кусочно-непрерывны, причем  $\sigma(P) > \sigma_c(P) > 0$  при  $P \in S$ , то оператор  $C^*C - E$  в пространстве кусочно-непрерывных функций положительно определен.

**Доказательство.** Поскольку выполняется соотношение

$$C^*C - E = D^{1/2}(A^* + A)D^{1/2} + (D^{1/2}AD^{1/2})^*(D^{1/2}AD^{1/2})$$

и  $\sigma(P) - \sigma_c(P) > 0$ , то для доказательства теоремы достаточно установить положительную определенность оператора  $A^* + A$ .

Пусть кусочно-непрерывная функция  $f(P)$  задана при  $P \in S$ , а функция  $u$  вне границ областей непрерывности проводимости  $\sigma_c$  и функции  $f$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u + i\omega \mu \sigma_c u = \begin{cases} -i\omega \mu f(P) & \text{при } P \in S, \\ 0 & \text{при } P \notin \bar{S}, \end{cases} \quad (25)$$

непрерывна, имеет непрерывные первые производные и удовлетворяет условию излучения на бесконечности. Тогда

$$u = -Af. \quad (26)$$

Определим скалярное произведение в пространстве функций, заданных в некоторой области  $Q$ :

$$(u, v)_Q = \int_Q u(P) \bar{v}(P) ds_P,$$

а также функцию  $F(P)$

$$F(P) = \begin{cases} f(P) & \text{при } P \in S, \\ 0 & \text{при } P \notin \bar{S}. \end{cases}$$

Поскольку

$$((A+A^*)f, f)_S = 2\operatorname{Re}(Af, f)_S = 2\operatorname{Re}(Af, F)_S,$$

то согласно формулам (25)–(26) получим

$$\begin{aligned} ((A+A^*)f, f)_S &= 2\operatorname{Re}\left(-u, \frac{\Delta u + i\omega\sigma_c u}{-i\omega\mu}\right)_S = \\ &= 2\operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\omega\mu}(u, \Delta u)_S\right\} + 2\operatorname{Re}(u, \sigma_c u)_S. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части формулы (27). Разобьем плоскость  $\mathcal{P}$  на подобласти  $S_\beta$ , в которых функции  $F(P)$  и  $\sigma_c(P)$  непрерывны. Пусть индекс  $\beta$  пробегает множество  $B$ . Согласно первой формуле Грина

$$\begin{aligned} (u, \Delta u)_S &= \sum_{\beta \in B} (u, \Delta u)_{S_\beta} = \sum_{\beta \in B} \left\{ -\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{S_\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{S_\beta} + \int_{\Gamma_\beta} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} dl \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma_\beta$  — граница области  $S_\beta$ ;  $\nu$  — нормаль к границе  $\Gamma_\beta$ , внешняя по отношению к области  $S_\beta$ . Поскольку функция  $u$  непрерывна, имеет непрерывную первую производную  $du/d\nu$  по нормали к границе  $\Gamma_\beta$  и экспоненциально убывает на бесконечности вместе со своей первой производной, то

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in B} \left\{ -\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{S_\beta} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{S_\beta} + \int_{\Gamma_\beta} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} dl \right\} = \\ = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_S - \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)_S. \end{aligned}$$

Таким образом, величина  $(u, \Delta u)_S$  вещественна и неположительна. Следовательно, первое слагаемое в правой части формулы (27) обращается в нуль.

Поскольку по условию теоремы  $\sigma_c(P) > 0$ , то второе слагаемое в правой части формулы (27) при  $u \neq 0$  положительно. Если  $f \neq 0$ , то согласно формуле (25)  $u \neq 0$ . Следовательно,

$$((A+A^*)f, f)_S > 0 \text{ при } f \neq 0.$$

Теорема доказана.

Согласно утверждению теоремы  $E < C^*C$ , т. е. константа  $\gamma_1$  в условиях (23) равна единице:

$$\gamma_1 = 1.$$

Найдем теперь константу  $\gamma_2$ . Поскольку

$$(C^*C(u, u)) = \|Cu\|^2 \leq \|E + D^{1/2}AD^{1/2}\|^2 \|u\|^2,$$

то, применяя неравенство треугольников, получим

$$\begin{aligned} (C^*Cu, u) &\leq (\|E\| + \|D^{1/2}AD^{1/2}\|^2\|u\|^2) \leq (1 + \|D\| \|A\|)^2\|u\|^2 \leq \\ &\leq \{1 + \max_{P \in S} [\sigma(P) - \sigma_c(P)] \|A\|\}^2\|u\|^2. \end{aligned}$$

Оценим сверху норму оператора  $A$ :

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\int_S \int_S |G_c(P, P_0) u(P_0)|^2 ds_{P_0}}}{\|u\|}$$

Функция  $G_c(P, P_0)$  имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов, и, следовательно, квадрат ее модуля интегрируем. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\begin{aligned} &\sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\int_S \int_S |G_c(P, P_0) u(P_0)|^2 ds_{P_0}}}{\|u\|} \leq \sup_{u \neq 0} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\int_S \int_S |G_c(P, P_0)|^2 ds_{P_0} \cdot \|u\|^2}}{\|u\|} = \sqrt{\int_S \int_S |G_c(P, P_0)|^2 ds_P ds_{P_0}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $\gamma_2$  получим выражение

$$\gamma_2 = \gamma^2,$$

где

$$\gamma = 1 + \max_{P \in S} [\sigma(P) - \sigma_c(P)] \sqrt{\int_S \int_S |G_c(P, P_0)|^2 ds_P ds_{P_0}}.$$

Пусть  $\lambda$  — относительная длина волны в первом слое толщины  $h_1$  и проводимости  $\sigma_1$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{h_1 \operatorname{Re} k_1}, \quad k_1 = \sqrt{i\omega\mu\sigma_1}, \quad \operatorname{Im} k_1 > 0,$$

тогда для  $\omega\mu$  получим выражение

$$\omega\mu = \frac{8\mu^2}{(\lambda h_1)^2 \sigma_1}.$$

Функция  $G_c$  выражается через функцию  $G_0$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\Delta G_0 + i\omega\mu\sigma_1 G_0 = -i\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

по формуле

$$G_c = \frac{8\pi^2}{(\lambda h_1)^2 \sigma_1} G_0,$$

следовательно,

$$\gamma = 1 + \max_{P \in S} \frac{\sigma(P) - \sigma_c(P)}{\sigma_1} \frac{8\pi^2}{(\lambda h_1)^2} \sqrt{\int_S \int_S |G_0(P, P_0)|^2 ds_{P_0} ds_P}, \quad (28)$$

и для числа итераций из (24) получим оценку:

$$n_0(\varepsilon) = \ln \frac{2}{\varepsilon} / \ln \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}} < 0,5 \ln \frac{2}{\varepsilon} / \sqrt{\xi} = \frac{\gamma}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon}.$$

Согласно этой оценке и формуле (28) скорость сходимости рассмотренного итерационного метода решения интегрального уравнения (18) тем больше, чем больше длина волны и чем меньше электропроводность неоднородности отличается от  $\sigma_c$ .

При численной реализации итерационного метода формулу (21) целесообразно разбить на две формулы. Сначала надо найти невязку  $r_k = (E + AD)u_k - f$ , а затем по невязке вычислить следующее приближение к решению  $u_{k+1} = u_k - \tau_{k+1}(E + A^*D)r_k$ .

Для реализации рассмотренных алгоритмов решения обратной задачи требуется многократно решать интегральные уравнения (2), (11), (12) или (2), (17). При решении с помощью ЭВМ интегрального уравнения (2) для расчета поля в прямой задаче МТЗ основная часть машинного времени затрачивается на вычисление значений функции  $G_c(P, P_0)$ . Поскольку функция  $G_c(P, P_0)$  не меняется от итерации к итерации при решении обратной задачи МТЗ, то естественно вычислить ее значения один раз и хранить в процессе счета эти значения, что позволяет существенно экономить время счета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 545—547.
3. Барашков И. С., Дмитриев В. И. Использование метода интегральных уравнений в обратной задаче МТЗ. — В кн.: Математические модели прикладной электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. Барашков И. С. Описание алгоритма решения двумерной обратной задачи МТЗ. — В кн.: Библиотека программ по геофизике. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Барашков И. С. Автоматизированная система интерпретации данных электромагнитных зондирований двумерных неоднородных сред. — В кн.: Современные вопросы физики и приложения. — М.: Изд-е Ин-та общей физики АН СССР, 1984.
6. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 463—473.
7. Березина Н. И., Дмитриев В. И., Захарова Е. А. Применение метода линеаризации к решению обратной задачи МТЗ в слоистой среде. — В кн.: Библиотека программ по геофизике. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
9. Гласко В. Б., Старостенко В. И. Регуляризирующий алгоритм решения системы нелинейных уравнений в обратных задачах геофизики. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1976, № 3, с. 44—53.

10. Гусаров А. Л. К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред. — В кн.: Математические модели задач геофизики. — М.: Изд-во МГУ, 1981.

11. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.

12. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

*Н. И. Березина, Е. А. Круглова*

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Одним из широко распространенных методов геофизических исследований является магнитотеллурическое зондирование (МТЗ), цель которого состоит в изучении строения Земли на основе данных измерений переменной составляющей естественного электромагнитного поля на поверхности Земли. В работах [1—2] А. Н. Тихоновым была показана принципиальная возможность восстановления геоэлектрических характеристик Земли по измеренному на поверхности Земли адмитансу электромагнитного поля. В настоящее время имеется геофизическая аппаратура, которая позволяет независимо измерять как модуль, так и фазу компонент электромагнитного поля, поэтому представляет интерес разработка численных методов решения обратной задачи МТЗ, когда в качестве входной информации используются либо амплитудные, либо фазовые характеристики адмитанса.

Устойчивые численные методы решения различных обратных задач МТЗ рассматривались в работах [3—6]. Для численного решения обратных задач МТЗ, в которых в качестве входной информации используется комплексный адмитанс электромагнитного поля на поверхности Земли, в работе [7] был предложен регуляризованный вариант метода Ньютона — Канторовича. В настоящей работе этот метод распространен на задачи восстановления проводимости среды по заданным на поверхности Земли значениям фазы адмитанса или кажущейся проводимости как функциям частоты электромагнитного поля.

Рассмотрим одномерную математическую модель строения Земли, т. е. будем предполагать, что проводимость среды зависит только от одной переменной  $z$ . Плоскость  $z=0$  примем за поверхность Земли. Будем считать, что проводимость Земли при  $z \gg H$  постоянна. Таким образом, распределение проводимости с глубиной имеет вид

$$\bar{\sigma}(z) = \begin{cases} \sigma(z), & 0 \leq z < H, \\ \sigma_H = \text{const}, & z \geq H. \end{cases}$$



Магнитная проницаемость среды всюду равна магнитной проницаемости вакуума  $\mu_0$ . Токами смещения пренебрегаем. Зависимость электромагнитного поля от времени имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ . Источником электромагнитного поля является нормально падающая плоская электромагнитная волна  $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$ ,  $\vec{H} = \{0, H_y, 0\}$ .

В этом случае адмитанс электромагнитного поля

$$y(z, \omega) = H_y(z, \omega) / E_x(z, \omega)$$

в слое  $0 \leq z < H$  является решением уравнения Риккати

$$y'(z, \omega) + i\omega\mu_0 y^2(z, \omega) = -\sigma(z) \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(H, \omega) = (1 + i) \sqrt{\sigma_H / 2\omega\mu_0} \quad (2)$$

В точках разрыва функции распределения проводимости  $\sigma(z)$  выполняется условие непрерывности функции  $y(z, \omega)$ .

В качестве входной информации для решения обратной задачи используется фаза адмитанса на поверхности среды

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} y(0, \omega)}{\operatorname{Re} y(0, \omega)}$$

или кажущаяся проводимость

$$\kappa(\omega) = \omega\mu_0 |y(0, \omega)|^2$$

Проводимость среды  $\bar{\sigma}(z)$  неотрицательна из физического смысла задачи. В геофизических задачах  $\bar{\sigma}(z) \geq \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — некоторое положительное число. В этом случае из уравнений (1) — (2) следует, что  $\operatorname{Re} y(0, \omega) > 0$ . Таким образом, функция  $\varphi(\omega)$  определена всюду.

Рассматриваемая обратная задача состоит в том, чтобы по значениям функции  $\varphi(\omega)$  (или  $\kappa(\omega)$ ) для частот  $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  найти распределение проводимости  $\sigma(z)$ . Толщину слоя переменной проводимости  $H$  можно считать неизвестной. Достаточно знать оценку сверху для толщины слоя  $H$ . Такая информация всегда имеется в геофизических задачах.

Функции  $\varphi(\omega)$  и  $\kappa(\omega)$  являются непрерывными функциями  $\omega$ . Мы будем рассматривать эти функции как элементы пространства  $L_2[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Распределение проводимости среды  $\sigma(z)$  в слое  $0 \leq z < H$  будем считать элементом пространства  $L_2[0, H]$ .

Рассматриваемые обратные задачи в указанных пространствах являются некорректными, так как сколь угодно сильно отличающимся в норме пространства  $L_2[0, H]$  проводимостям  $\sigma_1(z)$  и  $\sigma_2(z)$  могут соответствовать сколь угодно близкие функции  $\varphi_1(\omega)$  и  $\varphi_2(\omega)$  ( $\kappa_1(\omega)$  и  $\kappa_2(\omega)$ ). Более того, задача восстановления проводимости среды по фазе адмитанса не обладает свойством единственности. В самом деле, для любого геоэлектрического разреза с постоянной проводимостью

$$\bar{\sigma}(z) = \sigma_H \quad \text{при} \quad 0 \leq z \leq H$$

функция  $\varphi(\omega) = \pi/4$  для любого значения  $\sigma_H$  и любого значения частоты  $\omega$ . Таким образом, восстановление проводимости среды по фазе адмитанса  $\varphi(\omega)$  или кажущейся проводимости  $\kappa(\omega)$  возможно только с использованием дополнительной априорной информации о геоэлектрическом разрезе.

Численное решение обратной задачи осуществляется в два этапа. Цель первого этапа состоит в нахождении решения обратной задачи без учета дополнительной априорной информации об искомом решении, т. е. в нахождении одного из эквивалентных геоэлектрических разрезов. На втором этапе производится обработка полученного решения с учетом имеющейся априорной информации. Разделение процесса решения обратной задачи на два этапа упрощает численное решение каждой из подзадач, так как дополнительная информация о решении может носить самый разнообразный характер, в связи с чем ее часто трудно внести непосредственно в алгоритм решения обратной задачи.

На первом этапе для решения обратной задачи используется регуляризованный вариант метода Ньютона — Канторовича, основанный на линеаризации задачи.

Обозначим через  $A^*$  и  $A^\circ$  операторы, переводящие функцию распределения проводимости среды  $\sigma(z)$  соответственно в кажущуюся проводимость  $\kappa(\omega)$  и фазу адмитанса электромагнитного поля на поверхности среды  $\varphi(\omega)$ :

$$\kappa(\omega) = A^* \sigma(z), \quad \varphi(\omega) = A^\circ \sigma(z).$$

Пусть нам известно какое-либо приближение для распределения проводимости:

$$\bar{\sigma}_k(z) = \begin{cases} \sigma_k(z), & 0 \leq z < H, \\ \sigma_H^k, & z \geq H. \end{cases}$$

В окрестности точки  $\bar{\sigma}_k$  операторы  $A^*$  и  $A^\circ$  можно представить в виде

$$A^f(\bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_\delta) = A^f \bar{\sigma}_k + (A^f)_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta + O(\|\sigma_\delta\|_{L^2[0,H]}^2) + O((\sigma_H^\delta)^2), \quad (3)$$

где  $f = \varphi$  или  $f = \kappa$ ,

$$\bar{\sigma}_\delta(z) = \begin{cases} \sigma_\delta(z), & 0 \leq z < H, \\ \sigma_H^\delta, & z \geq H. \end{cases}$$

Производные  $(A^*)_{\bar{\sigma}_k}$  и  $(A^\circ)_{\bar{\sigma}_k}$  операторов  $A^*$  и  $A^\circ$  в точке  $\bar{\sigma}_k$  есть интегральные операторы:

$$(A^*)_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta = 2\omega\mu_0 \operatorname{Re} \left\{ y_k^*(0, \omega) \left[ \int_0^H K(u, \omega) \sigma_\delta(u) du + C_k(\omega) \sigma_H^\delta \right] \right\},$$

(4)

$$(A^{\Phi})_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta = \text{Im} \left\{ (y_k(0, \omega))^{-1} \left[ \int_0^H K(u, \omega) \sigma_\delta(u) du + C_k(\omega) \sigma_H^0 \right] \right\}.$$

Ядро  $K(u, \omega)$  операторов  $(A^x)_{\bar{\sigma}_k}$  и  $(A^{\Phi})_{\bar{\sigma}_k}$  имеет вид

$$K(u, \omega) = \exp \left\{ \int_0^u 2i\omega\mu_0 y_k(t, \omega) dt \right\},$$

где  $y_k(z, \omega)$  — адмитанс электромагнитного поля для распределения проводимости  $\bar{\sigma}_k(z)$ , т. е. решение задачи (1) — (2) для  $\bar{\sigma}(z) = \bar{\sigma}_k(z)$ ,  $y_k^*(z, \omega)$  — комплексно-сопряженная функция. Константа  $C_k(\omega)$  имеет вид

$$C_k(\omega) = (1 + i) (8\omega\mu_0\sigma_H^k)^{-0.5} \exp \left\{ \int_0^H 2i\omega\mu_0 y_k(t, \omega) dt \right\}.$$

На основе соотношений (3) строится итерационный процесс для нахождения решения обратной задачи.

Аппроксимируем функцию распределения проводимости среды  $\sigma(z)$  кусочно-постоянной функцией, т. е. будем считать, что среда состоит из достаточно большого числа тонких слоев толщиной  $h_k = z_{k+1} - z_k$  с постоянной проводимостью  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, (N-1)$  и подстилающего основания с проводимостью  $\sigma_N = \sigma_H$ . Будем считать, что фаза адмитанса  $\varphi(\omega)$  и кажущаяся проводимость  $\kappa(\omega)$  заданы для конечного набора частот  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  из отрезка  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Заданные значения фазы и кажущейся проводимости обозначим через  $\bar{\varphi}(\omega_m)$  и  $\bar{\kappa}(\omega_m)$ .

Обозначим через  $\sigma^k = \{\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_N^k\}$  значения проводимости слоев, полученные на  $k$ -й итерации. Значения толщины слоев в процессе решения задачи не изменяются. Адмитанс электромагнитного поля для геоэлектрического разреза с проводимостью  $\sigma^k$ , т. е. решение задачи (1) — (2) для распределения проводимости  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_k$  обозначим через  $y_k(z, \omega)$ , соответствующие фазу и кажущуюся проводимость — через  $\varphi_k(\omega)$  и  $\kappa_k(\omega)$ .

Очередное  $(k+1)$ -е приближение к решению обратной задачи  $\sigma^{k+1} = \{\sigma_1^{k+1}, \dots, \sigma_N^{k+1}\}$  вычисляется по формулам

$$\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k + \sigma_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где значения  $\bar{\sigma}_\delta = \{\sigma_1^0, \dots, \sigma_N^0\}$  определяются из условия минимума функционала:

$$\Phi_f(\bar{\sigma}_\delta) = \sum_{m=1}^M P_m |f_k(\omega_m) + (A^f)_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta - \bar{f}(\omega_m)|^2 + \sum_{j=1}^N \alpha_j^k (\sigma_j^0)^2, \quad (5)$$

$f = \varphi$  для задачи восстановления проводимости среды по фазе адмитанса и  $f = \kappa$  для задачи восстановления проводимости среды по заданной кажущейся проводимости;  $P_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  — за-

данные неотрицательные весовые коэффициенты;  $\{\alpha_1^k, \dots, \alpha_N^k\}$  — векторный параметр регуляризации.

Введение векторного параметра регуляризации позволяет одновременно решить две проблемы — обеспечить устойчивое нахождение решения задачи на минимум функционала (5) и организовать выбор параметров регуляризации  $\alpha_1^k, \dots, \alpha_N^k$  на каждой итерации таким образом, чтобы выполнялось условие неотрицательности значений проводимости  $\sigma_j^{k+1} \geq 0, j=1, 2, \dots, N$ . Алгоритм выбора параметров регуляризации приведен в работе [7].

Для среды с кусочно-постоянной проводимостью выражения (4) для производных операторов  $A^*$  и  $A^\circ$  принимают вид

$$(A^*)_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta = 2\omega\mu_0 \operatorname{Re} \left\{ y_k^*(0, \omega) \sum_{j=1}^N B_j^k(\omega) \sigma_j^\delta \right\},$$

$$(A^\circ)_{\bar{\sigma}_k} \bar{\sigma}_\delta = \operatorname{Im} \left\{ (y_k(0, \omega))^{-1} \sum_{j=1}^N B_j^k(\omega) \sigma_j^\delta \right\},$$

где

$$B_j^k(\omega) = \begin{cases} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \exp \left\{ 2i\omega\mu_0 \int_0^u y_k(t, \omega) dt \right\} du, & j=1, 2, \dots, (N-1), \\ (1+i)(8\omega\mu_0\sigma_N^k)^{-0.5} \exp \left\{ 2i\omega\mu_0 \int_0^H y_k(t, \omega) dt \right\}, & j=N. \end{cases}$$

Коэффициенты  $B_j^k(\omega)$  могут быть вычислены в явном виде через значения адмитанса  $y_k(z, \omega)$  на границах слоев и не требуют привлечения методов численного интегрирования. Значения проводимости  $\sigma_1^\delta, \dots, \sigma_N^\delta$ , дающих минимум функционалу (5), определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$G^k \bar{\sigma}_\delta = F^k.$$

Элементы матрицы  $G^k$  и правые части системы вычисляются по формулам

$$G_{pq}^k = \sum_{m=1}^M P_m \operatorname{Im} \left\{ (y_k(0, \omega_m))^{-1} B_p^k(\omega_m) \right\} \operatorname{Im} \left\{ (y_k(0, \omega_m))^{-1} B_q^k(\omega_m) \right\} + \delta_{pq} \alpha_p^k \quad (6)$$

$$F_p^k = \sum_{m=1}^M P_m (\bar{\varphi}(\omega_m) - \varphi_k(\omega_m)) \operatorname{Im} \left\{ (y_k(0, \omega_m))^{-1} B_p^k(\omega_m) \right\},$$

$$p=1, 2, \dots, N; q=1, 2, \dots, N$$

для фазы адмитанса и

$$G_{pq}^k = \sum_{m=1}^M 4\omega_m^2 \mu_0^2 P_m \operatorname{Re} \left\{ y_k^*(0, \omega_m) B_p^k(\omega_m) \right\} \operatorname{Re} \left\{ y_k^*(0, \omega_m) B_q^k(\omega_m) \right\} + \delta_{pq} \alpha_p^k \quad (7)$$

$$F_p^k = \sum_{m=1}^M 2\omega_m \mu_0 P_m (\bar{\kappa}(\omega_m) - \kappa_k(\omega_m)) \operatorname{Re} \{y_k^*(0, \omega_m) B_p^k(\omega_m)\},$$

$$p = 1, 2, \dots, N; q = 1, 2, \dots, N$$

для кажущейся проводимости.

В формулах (6) — (7)

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Критерием останова итерационного процесса служит условие стабилизации функционала невязки

$$Q(\bar{f}, f_k) = \sum_{m=1}^M P_m |\bar{f}(\omega_m) - f_k(\omega_m)|^2, \quad (8)$$

где  $\bar{f} = \varphi$  или  $\bar{f} = \kappa$ .

Приведем примеры численного решения обратных задач.

Для четырехслойного геоэлектрического разреза с толщиной слоев 200; 300 и 100 м с проводимостью слоев 0,1; 1,0 и 0,02 (Ом·м)<sup>-1</sup> и проводимостью подстилающего основания 1,0 (Ом·м)<sup>-1</sup> была решена прямая задача и получены значения кажущейся проводимости  $\kappa(\omega_m)$  и фазы адмитанса  $\varphi(\omega_m)$  для набора частот  $\omega_m = 2^m \cdot 0,0001$  с<sup>-1</sup>, где  $m = 1, 2, \dots, 26$ . Эта информация использовалась как входная для решения обратных задач.

На первом этапе решения обратной задачи описанный выше алгоритм использовался для того, чтобы найти решение обратной задачи в множестве 25-слойных геоэлектрических разрезов, состоящих из 24 слоев толщиной 25 м каждый и подстилающего основания.

В начальном распределении проводимости проводимость всех слоев была одинаковой и равной 0,2 (Ом·м)<sup>-1</sup>. Проводимость подстилающего основания также была равна 0,2 (Ом·м)<sup>-1</sup>.

В задаче восстановления распределения проводимости среды по фазе адмитанса было выполнено 100 итераций, при этом значение функционала невязки (8) уменьшилось от 0,57 до  $4 \cdot 10^{-8}$ .

В задаче, где в качестве входной информации использовалась кажущаяся проводимость, при том же начальном приближении были выполнены 423 итерации, за это время невязка уменьшилась от 5,8 до  $5 \cdot 10^{-7}$ . Время решения задачи на ЭВМ БЭСМ-6 составило около 5 мин для первой задачи и около 15 мин — для второй.

Полученные в результате решения задачи распределения проводимости среды приведены на рис. 1 и 2 (сплошные линии). Истинное распределение проводимости изображено на тех же рисунках штриховой линией. Как и следовало ожидать, полученные в результате численного решения задачи распределения проводимости отличаются от истинного, несмотря на малые значения функционалов невязки.

Наиболее часто используемая в геофизике априорная информация о геоэлектрическом разрезе — это, предполагаемое число

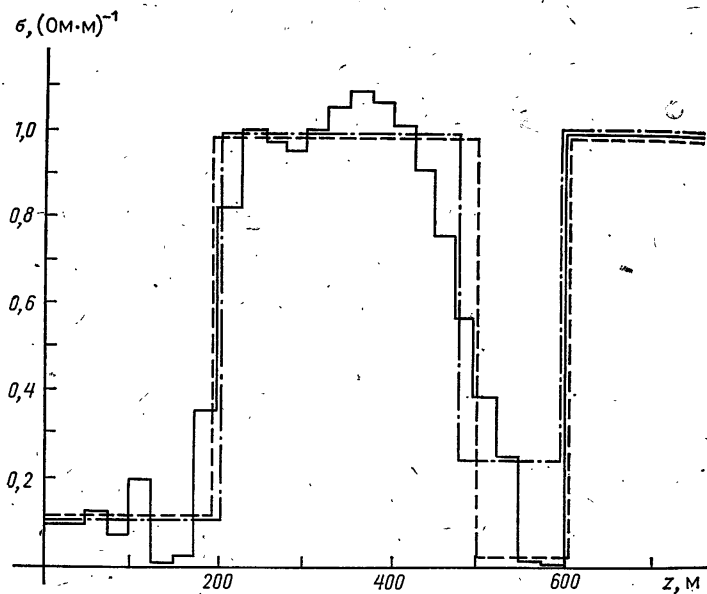


Рис. 1. Распределение проводимости среды в задаче восстановления проводимости по фазе адмитанса

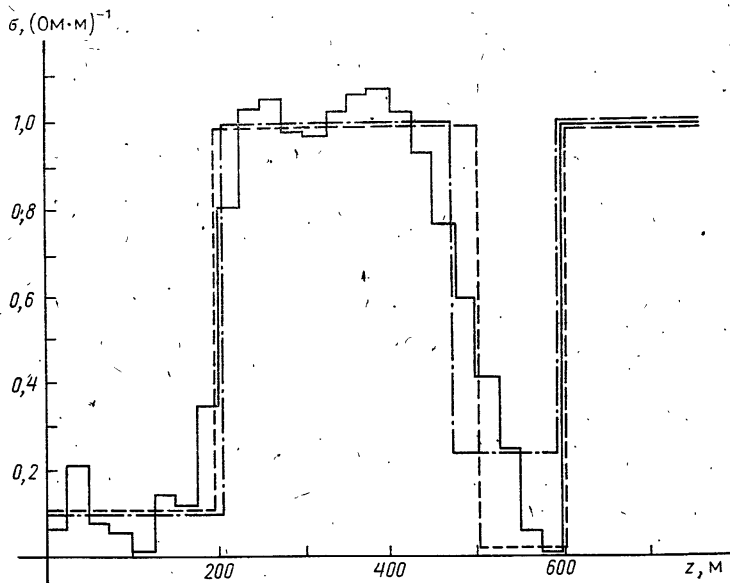


Рис. 2. Распределение проводимости среды в задаче восстановления проводимости по кажущейся проводимости

слоев геоэлектрического разреза. Эту дополнительную информацию трудно учесть непосредственно в алгоритме решения обратной задачи описанным выше методом линеаризации, так как эффективность использованного варианта метода Ньютона — Канторовича в значительной степени объясняется тем, что в процессе решения задачи не изменяется ни число, ни толщина слоев геоэлектрического разреза, что позволяет на каждой итерации одновременно с решением прямой задачи вычислять элементы матрицы  $G^k$  и правой части  $F^k$  для следующей итерации. Поэтому информация о числе слоев геоэлектрического разреза была использована на втором этапе решения обратной задачи. Обработка решения производилась с помощью алгоритма, основанного на свойствах функции интегральной проводимости

$$S(z) = \int_0^z \sigma(t) dt, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Очевидно, что проводимость геоэлектрического разреза  $\sigma(z)$  при  $0 \leq z < H$  однозначно определяется по непрерывной функции интегральной проводимости  $S(z)$ : Таким образом, можно ввести оператор, который непрерывной на  $[0, H]$  функции  $S(z)$  и проводимости  $\sigma_H$  подстилающего основания ставит в соответствие адмитанс электромагнитного поля на поверхности  $z=0$ . Известно [6], что этот оператор является непрерывным как оператор, действующий из метрического пространства с расстоянием

$$\|S_1(z) - S_2(z)\|_{L_2[0,H]} + |\sigma_H^1 - \sigma_H^2|$$

в пространство  $L_2[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Отсюда следует, что геоэлектрические разрезы с близкими в указанной метрике функциями интегральной проводимости и близкими проводимостями подстилающего основания имеют мало отличающиеся в норме  $L_2[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  фазовые и амплитудные характеристики адмитанса. На этом свойстве задачи основан использованный на втором этапе алгоритм.

Для найденных распределений проводимости в 25-слойных геоэлектрических разрезах были вычислены функции интегральной проводимости, которые затем аппроксимировались функциями интегральной проводимости четырехслойных разрезов. Оператор, связывающий функцию интегральной проводимости  $S(z)$  с распределением проводимости  $\sigma(z)$ , является линейным, поэтому численное решение задачи аппроксимации легко осуществляется на ЭВМ. Полученные при аппроксимации распределения проводимости для четырехслойных разрезов использовались как начальные приближения для решения обратной задачи описанным выше методом линеаризации, но теперь уже в множестве четырехслойных моделей. Распределения проводимости, полученные в результате обработки и уточнения первоначального решения задачи, приведены на рис. 1 и 2 штрих-пунктиром. Как видно из этих рисунков, толщина второго и третьего слоев была определена с ошибкой в

25 м. Из-за этого плохо восстановилась проводимость третьего слоя. Таким образом, использованной дополнительной информации о числе слоев геоэлектрического разреза оказалось недостаточно для полного восстановления разреза.

Авторы пользуются возможностью поблагодарить В. И. Дмитриева за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. — Докл. АН СССР, 1950, т. 73, № 2.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3.
3. Дмитриев В. И., Руднева Т. Л. Алгоритм решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования. — Препринт ВЦ МГУ, 1971.
4. Тихонов А. Н., Гласко В. Б., Кулик Н. И. Регуляризирующие алгоритмы для нелинейных задач и обратная задача магнитотеллурического зондирования. — В сб.: Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1973, вып. 20.
5. Хачай О. А. Обратная задача электромагнитного зондирования одномерной среды. Дис. на соискание учен. степ. канд. физ.-мат. наук. — Свердловск: Ин-т геофизики УНЦ АН СССР, 1979.
6. Дмитриев В. И., Алексеева Н. В. Алгоритм численного решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования. — В сб.: Библиотека программ по геофизике. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. Березина Н. И., Дмитриев В. И., Захарова Е. А. Применение метода линеаризации к решению обратных задач МТЗ в слоистой среде. — В сб.: Библиотека программ по геофизике. — М.: Изд-во МГУ, 1983.

*В. И. Дмитриев, Е. Г. Салтыков*

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЗОНДИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ ИОНОСФЕРЫ

Обратная задача зондирования ионосферы состоит в определении распределения плотности электронной концентрации  $N(z)$  по результатам измерения времени распространения сигнала  $\tau(f^2)$  от передатчика до приемника, находящихся на некотором расстоянии  $L$  на поверхности Земли, и по углу прихода луча  $\beta(f^2)$  — в зависимости от квадрата рабочей частоты  $f^2$  сигнала.

Прямая задача заключается в определении траектории сигнала — функции  $\varphi = \varphi(z)$  при заданной плотности распределения электронной концентрации (рис. 1). Эта задача сводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений и последующего определения времени распространения сигнала как интеграла от обратной величины скорости вдоль траектории.

Для плоско-слоистой модели ионосферы решение обратной задачи об определении монотонного профиля плотности электронной



концентрации по времени распространения электромагнитного сигнала при наклонном зондировании сводится к уравнению Абеля, которое можно решить аналитически [1]. Для сферически симметричной ионосферы соответствующее уравнение является более сложным и не допускает аналитического решения. В настоящей статье предлагается численный метод решения обратной задачи для сферически симметричной ионосферы.

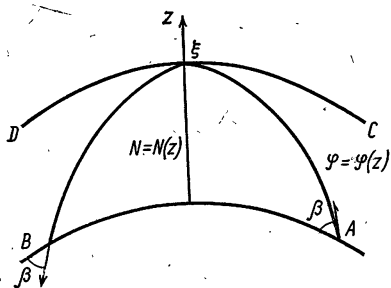


Рис. 1.  $\varphi(z)$  — траектория сигнала;  $N(z)$  — плотность электронной концентрации;  $\beta$  — угол прихода луча;  $AB$  — поверхность Земли;  $\xi$  — точка поворота;  $CD$  — линия уровня функции  $N(z)$

При определении плотности электронной концентрации в ионосфере используется метод наклонного зондирования, который состоит в следующем. В точке  $A$  на поверхности Земли располагают передатчик электромагнитных сигналов, в другой точке  $B$  на поверхности Земли устанавливают приемник. Электромагнитный сигнал, излученный передатчиком, отражается от ионосферы и принимается приемником. В точке  $B$  измеряется время распространения сигнала при прохождении пути от точки  $A$  до точки  $B$ . Кроме того, в точке  $B$  измеряется угол прихода луча. Время распространения сигнала и угол прихода луча зависят от квадрата частоты  $f^2$  сигнала. Предполагается, что плотность электронной концентрации  $N(z)$  является монотонно возрастающей и дифференцируемой функцией высоты  $z$  (высота  $z$  отсчитывается от поверхности Земли вдоль радиуса).

Можно показать [2], что групповой путь определяется следующим интегралом:

$$l(\Lambda) = 2r_0 \int_0^{\xi} \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon(z, \Lambda) - v^2(z, \Lambda)}}, \quad l(\Lambda) = c\tau(\Lambda), \quad (1)$$

где  $\tau(\Lambda)$  — время распространения сигнала;  $c$  — скорость света; функция  $v(z, \Lambda)$  имеет вид

$$v = \frac{\cos \beta}{1+z}, \quad \Lambda = f^2,$$

$\beta = \beta(\Lambda)$  — угол прихода луча. Незвестная функция  $\varepsilon$  (диэлектрическая проницаемость) выражается через функцию распределения нормированной электронной концентрации  $N(z)$  в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(z, \Lambda) = 1 - N(z)/\Lambda, \quad 0 < z.$$

Точка  $\xi = \kappa(\Lambda)$ , в которой подынтегральное выражение в (1) имеет особенность (знаменатель обращается в нуль), определяется равенством

$$\varepsilon(\chi(\Lambda), \Lambda) = v^2(\kappa(\Lambda), \Lambda). \quad (2)$$

Эта точка называется точкой поворота. Предполагается, что высота  $z$  в (1) измеряется в единицах радиуса Земли  $r_3$ .

Обратная задача наклонного зондирования ионосферы состоит в определении зависимости плотности электронной концентрации  $N$  от высоты  $z$  — функции  $N = N(z)$  — по зависимости времени распространения  $\tau = \tau(\Lambda)$  и зависимости угла прихода  $\beta = \beta(\Lambda)$  от квадрата рабочей частоты  $\Lambda$ . В связи с тем что одному и тому же значению  $\Lambda$  соответствуют два значения времени распространения  $\tau$  и угла  $\beta$ , удобно ввести однозначную функцию  $\Lambda = \Lambda(\beta)$  и однозначную функцию времени распространения  $\tau = T(\beta)$  от угла прихода  $\beta$ .

Рассмотрим функцию  $\mu = \Lambda(\beta) \sin^2 \beta$ . Предположим, что функция  $\Lambda = \Lambda(\beta)$  такова, что функция  $\mu = \mu(\beta)$  является монотонной функцией параметра  $\beta$ . Пусть функция  $\beta = B(\mu)$  является обратной для функций  $\mu = \mu(\beta)$ . Обозначим через  $\tau = t(\mu)$  функцию  $t(\mu) = T(B(\mu))$ . Функцию  $t = t(\mu)$  рассматриваем на отрезке  $[0, \infty]$ . Обозначим также через  $\Lambda = \lambda(\mu)$  функцию  $\lambda(\mu) = \Lambda[B(\mu)]$ .

Предположим, что функция  $\lambda(\mu)$  имеет вид параболы, выпуклостью обращенной вниз. На отрезке  $\mu \in [0, \mu_0]$  функция  $\lambda(\mu)$  и ее производная являются ограниченными и  $\lambda'(\mu) \leq 0$ . При  $\mu \in [\mu_0, \infty]$  функция  $\lambda'(\mu) \geq 0$ .

Обратная задача наклонного зондирования сводится к решению уравнения (1) с условием (2). Ее можно представить в виде

$$\int_0^{\xi(\mu)} \frac{dz}{\sqrt{\mu \psi(z) + \lambda(\mu) \chi(z) - N(z)}} = F(\mu), \quad (3a)$$

$$N(\xi(\mu)) = \mu \psi[\xi(\mu)] + \lambda(\mu) \chi[\xi(\mu)], \quad \mu \in [0, \infty], \quad (3b)$$

где

$$\chi(z) = 1 - \frac{1}{(1+z)^2}, \quad \psi(z) = 1 - \chi(z).$$

Предполагается, что

$$\frac{d\xi(\mu)}{d\mu} > 0, \quad \mu \in [0, \infty],$$

при  $\mu \in [0, \mu_0]$  функция

$$\xi(\mu) \ll 1. \quad (4)$$

Условие (4) связано с тем, что размеры рассматриваемой области ионосферы значительно меньше радиуса Земли.

Входящая в (3а) функция  $F(\mu)$  равна:

$$F(\mu) = \frac{ct'(\mu)}{2r_3 \sqrt{\lambda(\mu)}}.$$

В обратной задаче (3а)—(3б) функция  $F(\mu)$  задана, а функция  $N(z)$  подлежит определению. Покажем, что задача (3а)—(3б) сводится к интегро-дифференциальному уравнению второго рода, которое можно решить методом последовательных приближений.

Заметим, что если известна функция  $\xi = \xi(\mu)$ , то известна и обратная функция  $\mu = q(\xi)$ . Подставив ее в (3б), найдем  $N(z)$  в виде

$$N(z) = q(z)\psi(z) + \lambda[q(z)]\chi(z). \quad (5)$$

Таким образом, задача фактически сводится к определению функции  $\xi(\mu)$ .

В уравнении (3а) введем замену переменной интегрирования  $z = \xi(\mu)$ , представив интеграл  $F(\mu)$  в виде

$$\int_0^{\mu'} \frac{\xi'(\mu'') d\mu''}{\sqrt{\mu'\psi[\xi(\mu'')] + \lambda(\mu')\chi[\xi(\mu'')] - N[\xi(\mu'')]}} = f(\mu'),$$

где

$$f(\mu') = F(\mu') - \int_0^{\xi(0)} \frac{dz}{\sqrt{\mu'\psi(z) + \lambda(\mu')\chi(z) - N(z)}}.$$

С помощью (3б):

$$N[\xi(\mu'')] = \mu''\psi[\xi(\mu'')] + \lambda(\mu'')\chi[\xi(\mu'')] ]$$

получаем

$$\int_0^{\mu'} \frac{\xi'(\mu'') d\mu''}{\sqrt{\psi[\xi(\mu'')] (\mu' - \mu'') + \chi[\xi(\mu'')] [\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')]}} = f(\mu'). \quad (6)$$

Уравнение (6) может рассматриваться как уравнение Вольтерра I рода относительно функции  $\xi'(\mu'')$ , ядро которого зависит от функции  $\xi(\mu'')$ . Ядро интегрального уравнения (6) имеет интегрируемую степенную особенность вида  $(\mu' - \mu'')^{-1/2}$ .

Преобразуем это уравнение к уравнению II рода. Умножим уравнение (6) на функцию  $1/\sqrt{\mu - \mu'}$  и проинтегрируем по  $\mu'$  на интервале  $[0, \mu]$ :

$$\int_0^\mu \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu-\mu'}} \int_0^{\mu'} \frac{\xi'(\mu'') d\mu''}{\sqrt{\psi[\xi(\mu'')](\mu'-\mu'') + \chi[\xi(\mu'')][\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')]}} = G(\mu),$$

где

$$G(\mu) = \int_0^\mu \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu-\mu'}} f(\mu');$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\int_0^\mu \xi'(\mu'') \bar{L}(\mu, \mu''; \xi(\mu'')) d\mu'' = G'(\mu), \quad (7)$$

где

$$\bar{L}(\mu, \mu''; \xi(\mu'')) = L(\mu, \mu'') = \int_{\mu''}^\mu \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu-\mu'} \sqrt{\psi[\xi(\mu'')](\mu'-\mu'') + \chi[\xi(\mu'')][\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')]}}$$

Представим функцию  $L(\mu, \mu'')$  в виде

$$L(\mu, \mu'') = \int_{\mu''}^\mu \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu-\mu'} \sqrt{\mu'-\mu''}} \bar{\alpha}(\mu', \mu''; \xi(\mu'')),$$

где

$$\bar{\alpha}(\mu', \mu''; \xi(\mu'')) = \alpha(\mu', \mu'') = \frac{1}{\sqrt{\psi[\xi(\mu'')]+ \chi[\xi(\mu'')]\frac{\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')}{\mu' - \mu''}}}$$

Введем функцию

$$m(\mu, \mu''; \mu') = \int_{\mu''}^{\mu'} \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu-\mu'} \sqrt{\mu'-\mu''}},$$

$$m(\mu, \mu''; \mu) = \pi, \quad m(\mu, \mu''; \mu'') = 0.$$

С помощью этой функции интеграл  $L(\mu, \mu'')$  можно взять по частям и получить

$$L(\mu, \mu'') = \pi \alpha(\mu, \mu'') - \int_{\mu''}^\mu m(\mu, \mu''; \mu') \frac{\partial}{\partial \mu'} \alpha(\mu', \mu'') d\mu'.$$

Подставив выражение для  $L(\mu, \mu'')$  в (7), получим

$$\pi \int_0^\mu \xi'(\mu'') \alpha(\mu, \mu'') d\mu'' -$$

$$-\int_0^{\mu} \xi'(\mu'') d\mu'' \int_{\mu''}^{\mu} m(\mu, \mu''; \mu') \frac{\partial}{\partial \mu'} \alpha(\mu', \mu'') d\mu' = G(\mu).$$

Продифференцировав это уравнение по  $\mu$ , находим

$$\begin{aligned} \pi \xi'(\mu) \alpha(\mu, \mu) - \int_0^{\mu} \xi'(\mu'') d\mu'' \int_{\mu''}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} m(\mu, \mu''; \mu') \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mu'} \alpha(\mu', \mu'') d\mu' = \pi \Phi(\mu), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\mu} G(\mu).$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} m(\mu, \mu''; \mu') &= \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{\mu - \mu'}{\mu - \mu''}}, \\ \frac{\partial}{\partial \mu} m(\mu, \mu''; \mu') &= -\frac{1}{\mu - \mu''} \sqrt{\frac{\mu' - \mu''}{\mu - \mu'}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\alpha(\mu, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\psi[\xi(\mu)] + \chi[\xi(\mu)] \lambda'(\mu)}},$$

получим окончательно:

$$\xi'(\mu) = g(\mu) \left[ \Phi(\mu) + \int_0^{\mu} K(\mu, \mu'') \xi'(\mu'') d\mu'' \right], \quad (8)$$

где

$$g(\mu) = \bar{g}(\mu; \xi(\mu)) = \sqrt{\psi[\xi(\mu)] + \chi[\xi(\mu)] \lambda'(\mu)},$$

$$\begin{aligned} K(\mu, \mu'') = \bar{K}(\mu, \mu''; \xi(\mu'')) = \frac{1}{2\pi} \frac{\chi[\xi(\mu'')]}{\mu - \mu''} \int_{\mu''}^{\mu} \sqrt{\frac{\mu' - \mu''}{\mu - \mu'}} \times \\ \times \left[ \psi[\xi(\mu'')] + \chi[\xi(\mu'')] \frac{\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')}{\mu' - \mu''} \right]^{-3/2} \frac{\partial}{\partial \mu'} \left[ \frac{\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')}{\mu' - \mu''} \right] d\mu'. \end{aligned}$$

Из предположения, что функция  $\xi(\mu'')$  удовлетворяет уравнению (6) при заданной функции  $F(\mu')$ , следует, что функция  $\xi(\mu)$  удовлетворяет уравнению (8). При этом

$$\psi[\xi(\mu'')] + \lambda'(\mu'') \chi[\xi(\mu'')] > C_0^2, \quad (9)$$

$$\psi[\xi(\mu'')] + \chi[\xi(\mu'')] \frac{\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')}{\mu' - \mu''} > C_0^2 \quad (10)$$

при  $\mu'' \in [0, \mu_0]$  в силу условия (4). Условия (9) и (10) выполняются также при  $\mu'' > \mu_0$  в силу свойств возрастания функций  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  и убывания функции  $\psi$  от значения, близкого к единице, при возрастании  $\mu''$ .

Уравнение (8) будем решать методом последовательных приближений. Для получения первого приближения решаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\xi_0'(\mu) = \bar{g}(\mu; \xi_0(\mu)) \Phi(\mu). \quad (11)$$

Для получения следующих приближений решаем обыкновенное уравнение вида

$$\xi_n'(\mu) = \bar{g}(\mu; \xi_n(\mu)) \left[ \Phi(\mu) + \int_0^\mu \bar{K}(\mu, \mu''; \xi_{n-1}(\mu'')) \xi_{n-1}'(\mu'') d\mu'' \right]. \quad (12)$$

Уравнение (11) получается из уравнения (8) в результате отбрасывания интегрального члена. В результате присутствия под знаком интеграла функции  $\chi[\xi(\mu'')]$  он является малым при  $\mu \in [0, \mu_0]$ . Поэтому функция  $\xi_0(\mu)$  мало отличается от функции  $\xi(\mu)$  и при  $\mu \in [0, \mu_0]$  выполняется неравенство

$$\psi[\xi_0(\mu)] + \chi[\xi_0(\mu)] \lambda'(\mu) > C_0^2.$$

Это неравенство также справедливо при  $\mu > \mu_0$  в силу свойств функций  $\xi_0$ ,  $\psi$ ,  $\lambda$  и  $\chi$ .

Докажем сходимость ряда Неймана.

Оценим функцию  $\xi_0'(\mu)$ . Принимая во внимание, что

$$\bar{g}(\mu; \xi_0(\mu)) < C_1, \quad \Phi(\mu) < C,$$

получаем

$$\xi_0'(\mu) < CC_1.$$

Предположим, что  $(n-1)$ -й член ряда Неймана имеет оценку

$$\xi_{n-1}'(\mu) \leq CC_1 \left( 1 + q\mu + \dots + q^{n-1} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \right), \quad (13)$$

где

$$q = C_1 C_2 C_0^{-3} b, \quad b = \frac{1}{2\pi} B \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right),$$

постоянная  $C_2$  ограничивает функцию:

$$\frac{\partial}{\partial \mu'} \left[ \frac{\lambda(\mu') - \lambda(\mu'')}{\mu' - \mu''} \right] < C_2, \quad C_2 > 0. \quad (14)$$

Принимая во внимание (14) и равенство

$$\int_{\mu''}^{\mu} \sqrt{\frac{\mu' - \mu''}{\mu - \mu'}} d\mu' = B \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) (\mu - \mu''),$$

предполагая справедливость (10) для функции  $\xi_{n-1}(\mu'')$  и (9) — для  $\xi_n(\mu'')$ , получаем оценку (13) для функции  $\xi_n'$ . Оценка (13) доказывает сходимость последовательности  $\xi_n'$  к решению интегро-дифференциального уравнения (8).

При доказательстве сходимости последовательности  $\xi_n'$  к функции  $\xi'$  предполагалось выполнение неравенств (9) и (10) для функций  $\xi_n$  с постоянной  $C_0$ , не зависящей от номера  $n$ . Справедливость этих неравенств для конечного числа приближений  $n$  с номерами  $m$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < m < n$ , при  $\mu'' \in [0, \mu_0]$  следует из предположения (4) о малости функции  $\xi(\mu)$  при  $\mu \in [0, \mu_0]$ . Справедливость этих неравенств при  $m > n$  связано со сходимостью последовательности  $\xi_n'$  к функции  $\xi'$ . Справедливость неравенств (9) и (10) при  $\mu'' > \mu_0$  связана со свойством возрастания функций  $\xi_n$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  и свойством убывания  $\psi$  от значения, близкого к единице, при возрастании  $\mu''$ .

Заметим, что для реализации предложенного метода нужна априорная информация о функции  $N(z)$  на отрезке  $[0, \xi(0)]$ .

Как известно [3], обратные задачи математической физики в силу своей неустойчивости относятся к некорректно поставленным задачам. В нашем случае обратная задача становится устойчивой при дополнительном условии о принадлежности искомой функции  $N(z)$  множеству монотонно возрастающих и ограниченных функций, которое образует компакт в пространстве  $L_2$ . Мы свели обратную задачу к решению интегро-дифференциального уравнения (8). Некорректность этой задачи связана с неустойчивостью численного определения величины

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\mu} \int_0^{\mu} \frac{f(\mu')}{\sqrt{\mu - \mu'}} d\mu', \quad (15)$$

где  $f(\mu)$  — экспериментально определяемая с некоторой погрешностью величина.

Для регуляризации этой задачи нужно сгладить экспериментальные данные с помощью сплайн-аппроксимации. Шаг аппроксимации должен при этом соответствовать точности проводимых в эксперименте измерений. Полученная сплайн-функция подставляется в (15), и  $\Phi$  вычисляется аналитически. Такая предварительная обработка начальных данных позволяет перейти к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (12), а затем по  $\xi(\mu)$  построить  $N(z)$ .

Таким образом, дан метод сведения обратной задачи (3а) — (3б) к решению интегро-дифференциального уравнения, которое решается методом последовательных приближений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Салтыков Е. Г. Определение электронной концентрации по временнóму запаздыванию при наклонном зондировании в плоско-слоистой модели ионосферы. — В сб.: Численные методы в геофизических исследованиях. — М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 68—75.
2. Крофт Т. А., Хугасьян Г. Точные расчеты параметров траектории луча в квазипараболической ионосфере без учета магнитного поля. — В кн.: Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. — М.: Наука, 1971.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.

## К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ СРЕД

Обратная задача магнитотеллурического зондирования (МТЗ) состоит в изучении электропроводности глубинных слоев Земли по измеренным на поверхности Земли характеристикам электромагнитного поля, возникающего при естественных вариациях магнитного поля Земли. При проведении подобных исследований, конечно, очень желательно знать, позволяет ли измерение характеристик электромагнитного поля на поверхности Земли однозначно определять электропроводность.

Можно строить математические модели задачи МТЗ одной степени сложности: одномерные, двумерные и трехмерные. Для одномерной модели (проводимость и поля зависят только от одной координаты — глубины  $x_1$ ) теорема единственности доказана [1, 2] А. Н. Тихоновым, который показал, что по известному в некотором интервале частот импедансу ( $E_3/H_2$ )\* проводимость земных пород может быть, в принципе, определена однозначно.

Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные по МТЗ не укладываются в рамки одномерной обратной задачи, что вызывает необходимость изучения более сложных моделей и, в частности, вопросов единственности решения обратной задачи для таких моделей. В настоящей работе мы, следуя по пути, близкому к подходу А. Н. Тихонова, доказываем теорему единственности для двумерных моделей (поля и проводимость зависят от двух координат,  $x_1$  и  $x_2$ ). При некоторых достаточно естественных предположениях на проводимость мы показываем, что знание «импедансов»  $E_3/H_2$ ,  $E_3/H_1$ , измеренных на земной поверхности в некотором интервале частот, позволяет, в принципе, однозначно определить проводимость.

1°. Двумерная задача МТЗ связана со следующей физической ситуацией: «Земля» (проводник) занимает нижнее полупространство, а верхнее — непроводящий «воздух». Изучаемое поле высоко над Землей можно аппроксимировать полем плоской волны с волновым вектором, перпендикулярным поверхности Земли. Мы также считаем поле квазистационарным и гармонически изменяющимся во времени с частотой  $\omega$ . Пусть проводимость Земли постоянна по некоторому направлению, параллельному земной поверхности. Выберем систему координат так, чтобы ось  $x_1$  была направлена в глубь Земли, ось  $x_3$  — в направлении постоянства проводимости, ось  $x_2$  — так, чтобы полученная система координат была правовинтовой.

В этих координатах система уравнений Максвелла распадается

\*  $E_i$ ,  $H_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — компоненты электрического и магнитного полей.



на две независимые системы (« $E$ -поляризация» — относительно  $E_3, H_1, H_2$  и « $H$ -поляризация» — относительно  $E_1, E_2, H_3$ ). Далее мы имеем дело с системой в  $E$ -поляризации:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = -i\omega\mu_0 H_1, \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = i\omega\mu_0 H_2, \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = \sigma H_3, \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $\mu_0$  — магнитная проницаемость — константа, общая для Земли и воздуха.

Краевые условия, формализующие нашу физическую ситуацию, поставим следующим образом \*):

$$\begin{aligned} H_2(x, \omega) &\rightarrow H_2^0(\omega), & x_1 &\rightarrow -\infty, \\ E_3(x, \omega) &\rightarrow 0, & x_1 &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

$|E_3|$  ограничен равномерно при  $|x_1| < N \forall N > 0$ . Мы считаем, что падающая волна не полностью  $H$ -поляризована на всех частотах  $\omega$ , т. е.  $H_2^0(\omega) \neq 0 \forall \omega$  (можно было бы считать на некотором интервале частот); тогда, умножая решение на ненулевой множитель, можно добиться, чтобы  $H_2^0(\omega) = H_2^0 = \text{const}$ , —  $i\omega\mu_0 H_2^0 > 0$ .

Мы будем заниматься не самой системой (1) — (2), а эквивалентным уравнением

$$\Delta u - i\omega c(x)u = 0, \quad (3)$$

( $c(x) = \mu_0\sigma(x)$ ,  $u = E_3$ ) с условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \rightarrow -u_0, \quad u_0 = \text{const} > 0, \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$|u| \text{ ограничен равномерно при } |x_1| < N \forall N > 0. \quad (6)$$

Далее рассматривается класс «проводимостей»  $c(x)$ , который определяется следующими пятью условиями:

1)  $c(x)$  заключена между двумя положительными константами:

$$B_1 < c(x) < B_2. \quad (7)$$

2) «Земля»  $Q = \{x | x_1 > 0\}$  разбита на конечное число слоев  $Q_i$ , ограниченных гладкими кусочно-аналитическими кривыми,  $x_1 = \varphi_i(x_2)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ;  $\varphi_0 = 0$ ;  $\varphi_n = N_1 = \text{const}$ ;  $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n$ ;  $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^1)$  и существует локально конечное разбиение  $\mathbb{R}^1$  на замкнутые отрезки  $R_j$ , на каждом из которых  $\varphi_i$  аналитичны; первые и вторые производные  $\varphi_i$  ограничены по абсолютной величине

\*) Все сходимости при стремлении одной из переменных к  $\pm\infty$  предполагаются равномерными по другой.

не равномерно по  $x_2$ , а толщина  $i$ -го слоя  $\varphi_i(x_2) - \varphi_{i-1}(x_2)$  ограничена сверху и снизу двумя положительными константами, не зависящими от  $x_2$ .

3)  $c(x)$  аналитична в каждом из  $Q_i$  и аналитически продолжается в окрестность замыкания  $\bar{Q}_i$ , первые производные  $c$  ограничены равномерно в  $\bar{Q}_i$ .

4) Сужение  $c$  на первый слой  $Q_1$  аналитически продолжается в область  $U_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ ;  $U_\varepsilon = \{z \mid |\operatorname{Re} z_1| < \varepsilon; |\operatorname{Im} z_1| < \varepsilon; |\operatorname{Im} z_2| < \varepsilon\}$ , и это продолжение является ограниченной функцией.

5) Разрывы  $[c]_i(x_2)$  функций  $c$  на кривых  $s_i = \{x \mid x_1 = \varphi(x_2)\}$  отличны от нуля при всех  $x_2 \in \mathbb{R}^1$ ,  $i = 0, \dots, n$ ; таким образом,  $[c]_i(x_2)$  — непрерывная знакоопределенная функция. Ради удобства в дальнейшем припишем  $c$  на кривых  $s_i$  меньшее из двух возможных значений.

Нетрудно видеть, что «импедансы»  $E_3/H_2$ ,  $E_3/H_1$  совпадают с точностью до множителя с отношениями  $\frac{u}{\partial u / \partial x_1}$ ,  $\frac{u}{\partial u / \partial x_2}$ ; ясно

также, что последние отношения не зависят от «амплитуды падающей волны»  $u_0$  и определяются лишь «проводимостью»  $c$ .

Теперь мы можем сформулировать теорему единственности. Пусть имеются два распределения проводимостей  $c_1$  и  $c_2$  из указанного выше класса, и пусть  $u_1$  и  $u_2$  — соответствующие им решения задачи (3) — (6) (с разными, вообще говоря, константами  $u_0$ ).

**Теорема.** Пусть для  $a < x_2 < b$  и  $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{1}{u_1}(0, x_2, \omega) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{1}{u_2}(0, x_2, \omega),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{1}{u_1}(0, x_2, \omega) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{1}{u_2}(0, x_2, \omega).$$

Тогда  $c_1 \equiv c_2$ .

Отметим, что для аналитических во всей полуплоскости  $Q$  функций  $c$  эта теорема доказана Вайдельтом [4]. Однако для геофизики важен именно кусочно-аналитических функций  $c$ , и доказательство теоремы в этом случае связано с некоторыми затруднениями, требующими по сравнению с работой Вайдельта привлечения иных средств.

2°. Перечислим ряд свойств решений задачи (3) — (6), используемых при доказательстве теоремы.

1). Найдется окрестность  $V$  замкнутой нижней полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega < 0$ , такая, что при  $\omega \in V$  решение  $u(x, \omega)$  задачи (3) — (6) существует, единственно и аналитично по  $\omega$ .

2) Функция  $u(x, \omega)$  при всех  $\omega \in V$  аналитична по  $x_1, x_2$  всюду, кроме кривых  $s_i$ ; функции  $u(0, x_2, \omega)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, \omega)$  аналитичны по  $x_2$ .

3) Пусть  $\text{Im } \omega \leq 0$ . Тогда  $|u(x, \omega)| \leq \sup_{x \in S_0} |u(x, \omega)|$ .

Обозначим  $v(x, \omega) = u(x, -i\omega)$ ; таким образом,  $\Delta v - \omega cv = 0$  и выполнены условия (4) — (6).

4)  $v(x, \omega) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \omega \in \mathbb{R}^+$ .

5) Пусть  $x \in Q$  и  $\omega \in \mathbb{R}^+$ . Имеет место оценка

$$\frac{A_1}{\sqrt{\omega}} \exp(-A_2 \sqrt{\omega} x_1) \leq v(x, \omega) \leq \frac{A_3}{\sqrt{\omega}} \exp(-A_4 \sqrt{\omega} x_1), \quad (8)$$

где  $A_i > 0$  не зависят от  $x$  и  $\omega$ . В частности,

$$\frac{A_1}{\sqrt{\omega}} \leq v(0, x_2, \omega) \leq \frac{A_3}{\sqrt{\omega}}. \quad (8')$$

6) Пусть  $c_1(x), c_2(x)$  — проводимости из рассматриваемого класса и  $c_1 > c_2$ . Пусть  $v_j(x, \omega), (j=1, 2)$ , — решения уравнения  $\Delta v_j - \omega c_j v_j = 0$ , удовлетворяющие условиям (4) — (6) (константа  $u_0$  в (4) — общая). Тогда  $v_1(x) \leq v_2(x) \forall x \in \mathbb{R}^2$ .

Функцией Грина задачи МТЗ назовем функцию  $\Gamma(x, y, \omega)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_x \Gamma(x, y, \omega) - i\omega c(x) \Gamma(x, y, \omega) = -\delta(x-y),$$

условию

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow -\infty, \quad (9)$$

и условиям (5), (6); при  $x \neq y$  функция Грина  $\Gamma(x, y, \omega)$  как функция  $x$  и  $\omega$  обладает свойствами 1) и 2). Обозначим  $\Gamma(x, y, -i\omega) = G(x, y, \omega)$ . Для  $G$  выполнено уравнение

$$\Delta_x G(x, y, \omega) - \omega c(x) G(x, y, \omega) = -\delta(x-y) \quad (10)$$

и условия (9), (5), (6). Функция  $G$  обладает такими свойствами (всюду далее  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ):

7)  $G(x, y, \omega) \geq 0$ .

8)  $G(x, y, \omega) \geq \exp(-A_5 \sqrt{\omega} |x-y|) \forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y. \quad (11)$

9) При  $x_1 \geq 0, |x_2| \geq \delta > 0$ ,

$$G(0, x, \omega) \leq A_6 \frac{\exp(-A_6 \sqrt{\omega} |x_1|)}{(1 + \sqrt{\omega} |x_2|)^2}, \quad (12)$$

где  $A_6$  не зависит от координат и от  $\omega$ ;  $A_6$  не зависит еще и от  $\delta$ .

10) Пусть  $y \in Q$  и  $y_1 > 0$ . Для любого  $\zeta, 0 < \zeta < y_1$ , в кольце  $\delta < |x-y| < \zeta$  имеет место оценка

$$G(x, y, \omega) \leq A_6 \exp(-\sqrt{\omega} A_9 |x-y|).$$

Разобьем внешность круга  $|x-y| < \zeta$  на две части:

$$O_1 = \{x | |x-y| > \zeta\} \cap \{x | 0 < x_1 < y_1 + \zeta\},$$

$$O_2 = \{x | x_1 > y_1 + \zeta\}.$$

Если  $x \in O_1$ , то

$$G(x, y, \omega) \leq A_7 \frac{\exp(-\sqrt{\omega} A_6 \xi)}{(1 + \sqrt{\omega} |x_2 - y_2|)^2}, \quad (13)$$

а если  $x \in O_2$ , то

$$G(x, y, \omega) \leq A_7 \frac{\exp(-\sqrt{\omega} A_9 |x_1 - y_1|)}{(1 + \sqrt{\omega} |x_2 - y_2|)^2}, \quad (14)$$

где  $A_6, A_7$  не зависят от координат и от  $\omega$ ;  $A_9$  не зависит еще и от  $\delta, \xi$ .

Сделаем еще следующие замечания перед доказательством теоремы. Прежде всего, продолжив функции  $u_1$  и  $u_2$  аналитически по  $\omega$  на отрицательную мнимую полуось, а по  $x_2$  — на все  $x_2 \in \mathbb{R}^1$ , домножив затем одну из них на подходящую константу, можно считать, что

$$\Delta v_1 - \omega c_1 v_1 = 0, \quad (15)$$

$$\Delta v_2 - \omega c_2 v_2 = 0 \quad (16)$$

(напомним, что  $v_j(x, \omega) = u_j(x, -i\omega)$ ,  $j=1,2$ ); при этом

$$v_1(0, x_2, \omega) = v_2(0, x_2, \omega), \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(0, x_2, \omega) = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(0, x_2, \omega) \quad (18)$$

для всех  $x_2 \in \mathbb{R}^1$  и  $\omega > 0$ .

Ниже теорема доказывается в предположениях (15)–(18).

3°. Приведем ряд лемм, играющих существенную роль в доказательстве.

Введем в  $Q$  риманову метрику  $ds^2 = c(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$  \*). (При измерении в этой метрике длин кривых, идущих по границам слоев, следует учитывать, что на линиях разрыва величина  $c$  принимает меньшее из двух возможных значений.) Пусть  $d(x)$  — расстояние от точки  $x$  до  $s_0 = \{x | x_1 = 0\}$  в нашей метрике.

Лемма 1. Для любого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in Q$  найдется такое  $\Omega$ , что при  $\omega > \Omega$  имеет место оценка:

$$\exp(-\sqrt{\omega}(d(x) + \varepsilon)) \leq v(x, \omega) \leq \exp(-\sqrt{\omega}(d(x) - \varepsilon)). \quad (19)$$

При этом  $\Omega$  можно выбрать не зависящим от  $x$ , когда  $x$  изменяется в компактном множестве  $K \subset Q$ .

Оценка (19) в случае, когда  $c(x)$  — гельдерова функция, немедленно следует из результатов работы Варадана [3] (и неравенства (8')). В нашем случае ситуация несколько осложняется наличием кратчайших путей метрики, проходящих по линиям разрыва  $c(x)$  («скользящие лучи» геометрической оптики). Из-за скачка  $c$  в окрестности такого луча воспользоваться рассуждениями Варадана непосредственно не удается, но можно провести ре-

\*) Мы опускаем индекс у  $v$  и  $c$  в утверждениях, справедливых для  $v_1$  и  $v_2$  ( $c_1$  и  $c_2$ ) одновременно.

дукцию оценки (19) к оценкам Варадана, деформировав метрику в окрестности линий разрыва и проследив за поведением геодезических при такой деформации.

Следующие леммы заменяют нам такой факт: линия уровня  $d(x) = d(x_0)$  — кусочно-аналитическая кривая; и если множество  $\{x | d(x) \leq d(x_0), |x - x_0| < \varepsilon\}$  лежит только в одном слое  $Q_i$ , то возможное заострение на линии уровня в точке  $x_0$  указывает в сторону меньших значений функции  $d$ . Однако доказательство утверждения об аналитических свойствах линии уровня достаточно громоздкое, и мы пользуемся только элементарными леммами, приводимыми ниже.

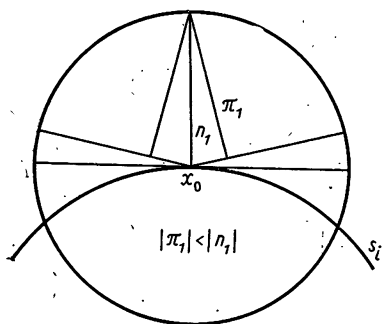


Рис. 1

Обозначим через  $M_a$  множество  $\{x | d(x) \leq a\}$  и через  $S(x_0, \varepsilon, l, \beta)$  — замкнутый сектор круга радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x_0$ , с биссектрисой угла при вершине, направленной по вектору  $l$ , и с углом  $\beta$  между  $l$  и граничными радиусами. Пусть  $x_0 \in s_i$  ( $s_i$  — граница  $i$ -го слоя) и  $n_1$  — нормаль к  $s_i$  в точке  $x_0$ , направленная в сторону, отрицательных значений  $x_1$ ;  $n_2$  — противоположно направленная нормаль. Обозначим  $d(x_0) = a$ .

Лемма 2. Пусть для  $y \in s_i$   $d(y) \geq a$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что множество  $M_a$  содержит по крайней мере один из секторов  $S(x_0, \varepsilon, n_1, \pi/2 - \delta)$  или  $S(x_0, \varepsilon, n_2, \pi/2 - \delta)$ .

Доказательство: рис. 1.

Далее понадобится также родственная лемма.

Лемма 2'. Для любого  $\delta > 0$  найдутся такие  $\varepsilon > 0$  и  $\eta > 0$ , что если  $d(y) - a \geq \eta |y - x_0| \forall y \in s_i$ , то  $M_a$  содержит по крайней мере один из секторов  $S(x_0, \varepsilon, n_1, \pi/2 - \delta)$  или  $S(x_0, \varepsilon, n_2, \pi/2 - \delta)$ . Величины  $\varepsilon$  и  $\eta$  зависят, помимо  $\delta$ , ещё и от верхней границы модуля первых и вторых производных  $\varphi_i$  ( $s_i = (\varphi_i(x_1), x_2)$ ) в точке  $x_2$  и от констант Липшица  $c|_{Q_i}$  и  $c|_{Q_{i+1}}$ .

Следующие три леммы также родственны между собой.

Лемма 3. Пусть  $\varphi(t)$  — непрерывная функция одного переменного, определенная на отрезке  $[0, \delta]$ . Пусть  $\varphi \geq 0$  и  $\varphi(0) = 0$ . Предположим еще, что  $\varphi'(0)$  существует и равна нулю. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  в любой окрестности нуля найдется такая точка  $t_\varepsilon > 0$ , что  $\varphi(t) - \varphi(t_\varepsilon) \geq -\varepsilon |t - t_\varepsilon| \forall t \in [0, \delta]$ .

Лемма 3'. Пусть на  $(M, \infty)$  определена кусочно-непрерывная и непрерывная снизу функция  $\varphi$ . Пусть  $\varphi > 0$  на  $[M, \infty)$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \varphi(t) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $M_1 > M$  найдется такое  $t_\varepsilon > M_1$ , что  $\varphi(t) - \varphi(t_\varepsilon) \geq -\varepsilon |t - t_\varepsilon| \forall t \in [M, \infty)$ .

Лемма 3". Пусть на  $[0, \delta]$  имеется непрерывная неотрицательная функция  $\varphi$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi(t) < \varepsilon t$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . В любой окрестности нуля найдется такая точка  $t_\varepsilon > 0$ , что  $\varphi(t) - \varphi(t_\varepsilon) \geq -2\varepsilon |t - t_\varepsilon| \forall t \in [0, \delta]$ .

4°. Перейдем теперь собственно к доказательству теоремы. Предположим, что  $c_1 \neq c_2$ . Возможны два варианта:  $c_1 \neq c_2$  в любой окрестности прямой  $s_0$  (вариант А);  $c_1 \equiv c_2$  в окрестности  $s_0$  (вариант В). Доказательства в случаях А и В довольно сильно отличаются друг от друга.

В а р и а н т А. Доказательство в этом случае повторяет рассуждения из [4]. Пусть  $\delta c \stackrel{\text{def}}{=} c_2 - c_1$ . Из аналитических свойств  $c_1$  и  $c_2$  следует, что функция  $\delta c$  аналитична и ограничена в полосе  $0 < x_1 < \varepsilon$ ; при этом найдутся такие  $n$  и  $r$ , что, сдвинув при необходимости начало координат, мы можем считать выполненным в полукруге  $|x| < r \cap \{x_1 > 0\}$  неравенство

$$\delta c(x) \geq c_1 x_1^n, \quad (20)$$

а по всей полосе — неравенство  $|\delta c(x)| < c_2 x_2^n$ .

Вычитая (15) из (16), получаем для  $w = v_2 - v_1$  уравнение

$$\Delta w - \omega c_2 w = \omega \delta c v_1,$$

и для  $w$  выполнены условия (4) — (6), причем в (4)  $u_0 = 0$ . Отсюда имеем

$$w(x, \omega) = \int_Q \omega G_2(x, y, \omega) \delta c(y) v_1(y, \omega) dy, \quad (21)$$

где  $G_2$  — функция Грина, определенная условиями (10), (9), (5), (6) (в (10)  $c = c_2$ ).

Покажем, что из (21) следует  $w(0, \omega) \neq 0$  при достаточно большом  $\omega$ , тем самым доказательство в случае А будет закончено.

Разобьем полупространство  $Q$  на четыре области,  $D_1 - D_4$ , следующим образом. Положим  $r_1 = \frac{1}{2} \min(r, \varepsilon)$ . Областью  $D_1$  будет прямоугольник  $0 < x_1 < r_1$ ,  $|x_2| < r_1$ ; области  $D_2$  и  $D_3$  задаются неравенствами  $0 < x_1 < r_1$ ,  $x_2 < -r_1$  и  $0 < x_1 < r_1$ ,  $x_2 > r_1$ , область  $D_4$  — полуплоскость  $x_1 > r_1$ . Интеграл в (21), взятый для  $x = 0$ , разделим на четыре интеграла  $I_k$  ( $I_k$  берется по области  $D_k$ ) и оценим каждый из них.

Из (20), с учетом неравенств (11) и (8) легко получаем  $I_1 > C_3 / (\sqrt{\omega})^{n+1}$ . Для оценки  $|I_2|$  воспользуемся неравенствами (8) и (12) и оценкой сверху для  $\delta c$ ; мы получим

$$|I_2| \leq C_4 \sqrt{\omega} \int_{D_2} \frac{\exp(-C_5 \sqrt{\omega} |y_1|)}{(1 + \sqrt{\omega} |y_2|)^2} y_1^n dy.$$

Проинтегрировав в последнем интеграле по  $y_2$  и приняв во внимание оценку  $(1 + \sqrt{\omega}|y_2|)^2 \gg \omega y_2^2$ , сделав затем замену переменных  $\sqrt{\omega}y_1 = \eta$ , получаем  $|I_2| \leq C_6/\sqrt{\omega}^{n+2}$ . Аналогично,  $|I_3| \leq C_7/(\sqrt{\omega})^{n+2}$ . И наконец, в силу неравенств (12) и (8) и ограниченности  $\delta c|I_4| \leq \exp(-C_8\sqrt{\omega})$ . Собирая оценки  $I_k$ , получаем  $\omega(0, \omega) \geq C_9/(\sqrt{\omega})^{n+1}$  при достаточно большом  $\omega$ . Доказательство в случае А закончено.

Вариант В. Наметим сначала общую схему рассуждений в этом случае.

Обозначим через  $Q'$  (связную) область, каждая точка которой имеет окрестность, в которой  $c_1 \equiv c_2$  и  $Q'$  прилегает к прямой  $s_0$ . Пусть  $Q'' = Q \setminus Q'$ . Учитывая условия (17) и (18) и применяя теорему единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений [5, гл. VIII], получим, что  $v_1(x, \omega) = v_2(x, \omega)$  в области  $Q'$  и, следовательно, в ее замыкании  $\bar{Q}'$ . Обозначим через  $d_1(x)$  расстояние от точки  $x \in Q$  до прямой  $s_0$  в метрике  $ds^2 = c_1(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$ . Пусть  $x_0$  — точка границы  $\partial Q''$ , в которой  $d_1(x)$  принимает минимальное значение на  $\partial Q''$  (или, если такой точки нет, значение, близкое к минимальному; точные формули-

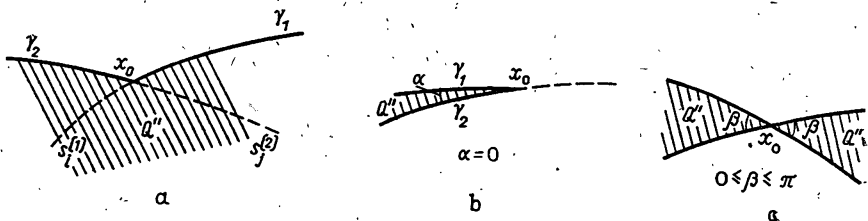


Рис. 2

ровки см. ниже). Используя интегральное представление (21) для  $\omega = v_2 - v_1$ , мы покажем, применяя приведенные выше леммы, что в окрестности  $x_0$  найдется такая точка  $y_0 \in \bar{Q}'$ , в которой  $\omega(y_0, \omega) \neq 0$  при достаточно большом  $\omega$ . Это противоречит факту совпадения  $v_1$  и  $v_2$  в  $\bar{Q}'$ .

Теперь мы несколько детализируем приведенную схему. Заметим прежде всего, что, как нетрудно видеть, граница  $\partial Q'$  области  $Q'$  состоит из кусков границ слоев  $s_i^{(1)}$  и  $s_i^{(2)}$ . Далее, нетрудно показать, что локально граница  $\partial Q'$  состоит из двух или из четырех аналитических дуг; причем если этих дуг ровно две и если  $\alpha$  — угол между ними, внутри которого заключено множество  $Q''$ , то либо  $\alpha \geq \pi$ , либо  $\alpha = 0$  (рис. 2).

Рассмотрим теперь функцию  $d_1(x)$  на  $\partial Q'' (= \partial Q' \setminus s_0)$ . Возможны два случая:

I) существует точка  $x_0 \in \partial Q''$ , в которой  $d_1$  достигает минимального значения на  $\partial Q''$ ;

II) такой точки не существует. Мы подробно разберем случай I и вкратце опишем аналогичные рассуждения в случае II.

Соответственно возможностям, изображенным на рис. 2, а, в, с, мы имеем подслучаи ВIа, ВIв, ВIс.

Используя интегральное представление

$$\omega(x, \omega) = \int_{Q''} \omega G_2(x, y, \omega) \delta c(y) v_1(y, \omega) dy \quad (22)$$

(на  $Q' \delta c = 0$ ), найдем точку  $y_0 \in Q'$ , такую, что  $\omega(y_0, \omega) \neq 0$  при достаточно большом  $\omega$ .

**ВIа.** Отметим, что в ситуации, которую мы сейчас рассматриваем, угол  $\alpha$  между  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 2, а) в точности равен  $\pi$ . Мы только что заметили, что  $\alpha \geq \pi$ , а, применяя лемму 2, нетрудно показать, что дополнительный к  $\alpha$  угол  $\geq \pi$ .

Станем разыскивать точку  $y_0$  на  $\gamma_1$ . Введем натуральную параметризацию  $\gamma_1: f: [0, \delta] \rightarrow \gamma_1$ ,  $f(0) = x_0$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(s) = d_1(f(s)) - d_1(x_0)$  на отрезке  $[0, \delta]$ . Эта функция непрерывна, неотрицательна и  $\varphi(0) = 0$ . Применив лемму 2, мы убедимся, что  $\varphi(s) \leq \varepsilon(s)s$ , где  $\varepsilon(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$ . Итак, к функции  $\varphi(s)$  применима лемма 3.

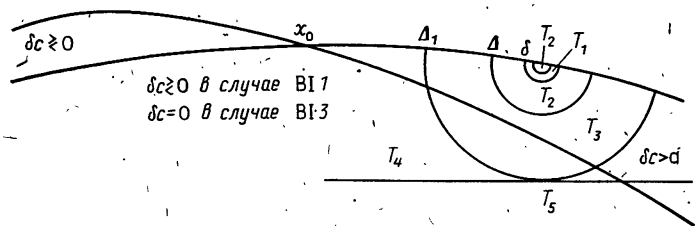


Рис. 3

Прежде чем пользоваться леммой 3, положим  $B = \min(B_1, A_9)$ , где  $A_9$  — константа неравенств (12) — (14);  $B_1$  — из (7) и пусть  $\varepsilon_0 = 1/4 B$ . Воспользовавшись леммой 3, найдем такое  $s_0$ , что

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) \geq -\varepsilon_0 |s - s_0| \quad \forall s \in [0, \delta]. \quad (23)$$

Определим  $y_0 = f(s_0)$ , и пусть  $\Delta_1 = (1/2)s_0$ . Покажем, что  $\omega(y_0, \omega) \neq 0$  при большом  $\omega$ .

Обозначим через  $K_{r,x}$ ,  $r$  круг  $\{\xi \mid |\xi - x| \leq r\}$ . Пусть  $\Delta > 0$  так мало, что в  $Q'' \cap K_{y_0, \Delta}$  функция  $\delta c$  сохраняет знак (для определенности  $\delta c > 0$ ). Легко видеть, что такое  $\Delta$  существует. Для оценки интеграла (22), взятого для  $x = y_0$ , разобьем область интегрирования на пять частей (рис. 3) (величина  $\delta < \Delta$  будет указана ниже):

- часть  $T_1$ , лежащую в кольце  $K_{y_0, \delta} \setminus K_{y_0, \delta/2}$ ;
- часть  $T_2$ , состоящую из  $K_{y_0, \delta/2} \cap Q''$  и  $K_{y_0, \Delta} \setminus K_{y_0, \delta} \cap Q''$ ;
- часть  $T_3$ , лежащую в  $K_{y_0, \Delta_1} \setminus K_{y_0, \Delta}$ ;



часть  $T_4$ , лежащую вне  $K_{p_{y_0, \Delta_1}}$  в полосе  $0 < y_1 < y_{01} + \Delta_1$ ; и наконец, часть  $T_5$ , лежащую в полупространстве  $y_1 > y_{01} + \Delta_1$ .

Обозначим интегралы по области  $T_k$  через  $I_k$  и оценим каждый из них. Обозначим еще  $d(x_0) = a$ ,  $d(y_0) = b$ .

Применяя лемму 1 для оценки  $v_1$ , имеем

$$v_1(y, \omega) \geq \exp(-\sqrt{\omega}(b + B_2\delta + \varepsilon))$$

в  $T_1$  для любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно большом  $\omega$ . Пользуясь неравенством (11) для оценки  $G_2$  и учитывая, что  $\delta c$  отделена от нуля в пересечении  $T_1$  с некоторым углом, меньшим  $\pi$ , с вершиной в точке  $x_0$ , получаем

$$I_1 \geq \exp(-\sqrt{\omega}(b + (B_2 + A_5)\delta + \varepsilon))$$

при достаточно большом  $\omega$ .

Очевидно,  $I_2 \geq 0$  в силу нашего выбора  $K_{p_{y_0, \Delta_1}}$ .

Оценим интеграл  $I_3$ . Пусть  $y$  — произвольная точка  $T_3$  и  $\gamma_y$  — кривая, соединяющая  $y$  с  $s_0$ , такая, что  $l_1(\gamma_y) \leq d_1(y) + \varepsilon$  ( $l_1(\gamma)$  — длина  $\gamma$  в метрике  $ds^2 = c_1(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$ ). Могут пред- ставиться два случая:

i) множество  $Z = \gamma_y \cap \partial K_{p_{y_0, \Delta_1}} \cap Q'' \neq \emptyset$ ;

ii)  $Z = \emptyset$ , тогда  $\gamma_y \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ .

В обоих случаях подынтегральное выражение в (22) обозначим  $U(y_0, y, \omega)$  и оценим его по модулю.

**В Ia (i).** Пусть  $z \in Z$ . Разобьем  $\gamma_y$  на участки:  $\gamma_z$  — от  $s_0$  до  $z$ , и  $\gamma_{zy}$  — между  $z$  и  $y$ . Поскольку  $l_1(\gamma_z) \geq a$ ,  $l_1(\gamma_{zy}) \geq B_1|z-y|$ , то в силу нашего выбора  $\gamma_y$

$$d_1(y) \geq a + B_1|z-y| - \varepsilon,$$

откуда по лемме 1

$$v_1(y, \omega) \leq \exp(-\sqrt{\omega}(a + B_1|z-y| - 2\varepsilon)).$$

Оценивая  $G_2(y_0, y, \omega)$  с помощью неравенства (14) и  $\delta c$  с учетом (7), получим при большом  $\omega$ :

$$\begin{aligned} |U(y_0, y, \omega)| &\leq 2B_2A_3\omega \exp(-\sqrt{\omega}(a + B_1|z-y| + \\ &+ A_3|y-y_0| - 2\varepsilon)) \leq \exp(-\sqrt{\omega}(a + B\Delta_1 - 3\varepsilon)) \leq \\ &\leq \exp(-\sqrt{\omega}(b + 2\varepsilon_0\Delta_1 - 3\varepsilon)). \end{aligned}$$

**В Ia (ii).** Пусть  $z \in \gamma_y \cap \gamma_1$ . Разобьем  $\gamma_y$  на  $\gamma_{zy}$  и  $\gamma_z$  так же, как и выше. Из неравенства (23) и очевидной оценки  $l_1(\gamma_z) \geq d_1(z)$  получаем

$$l_1(\gamma_z) \geq b - 3/2\varepsilon_0|y_0-z| \geq b - 1/2B|y_0-z|.$$

Далее, поскольку  $l_1(\gamma_{zy}) \geq B_1|z-y|$ ,  $d_1(y) \geq l_1(\gamma_y) - \varepsilon$ ,  $B_1 \geq B$ , то имеем

$$d_1(y) \geq b - 1/2B|y_0-z| + B|z-y| - \varepsilon \geq b - 1/2B|y_0-y| - \varepsilon.$$

Лемма 1 дает теперь

$$v_1(y, \omega) \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b - 1/2B|y_0-y| - 2\varepsilon)) \leq$$

$$\leq \exp(-\sqrt{\omega}(b-2\varepsilon_0\Delta-2\varepsilon)).$$

Оценивая  $G_2(y_0, y, \omega)$  так же, как и выше, получаем

$$|U(y_0, y, \omega)| \leq A_6 \omega \exp(-\sqrt{\omega}(b-2\varepsilon_0\Delta+A_9\Delta-2\varepsilon)) \leq \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b+2\varepsilon_0\Delta-3\varepsilon))$$

при достаточно большом  $\omega$ .

Итак, в обоих случаях (i) и (ii)

$$|U(y_0, y, \omega)| \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b+2\varepsilon_0\Delta-3\varepsilon)),$$

и, поскольку меру  $T_3$  можно считать не больше 1,

$$|I_3| \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b+2\varepsilon_0\Delta-3\varepsilon)).$$

Для оценки интегралов  $I_4, I_5$  учтем, что на  $T_4, T_5$   $v_1(y, \omega) \leq \exp(-\sqrt{\omega}(a-\varepsilon))$ ; оценим  $G_2$  с помощью неравенств (13), (14). Примем во внимание оценку (23), определение  $\Delta_1$  и неравенство  $\Delta_1 > \Delta$ . Получим

$$|I_4| \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b+\varepsilon_0\Delta-2\varepsilon)),$$

$$|I_5| \leq \exp(-\sqrt{\omega}(b+\varepsilon_0\Delta-2\varepsilon)).$$

Соединим оценки  $I_j, j=1, \dots, 5$ . Получим

$$\omega(y_0, \omega) \geq \exp(-\sqrt{\omega}(b+(B_2+A_5)\delta+\varepsilon)) - 3 \exp(-\sqrt{\omega} \times \times (b+\varepsilon_0\Delta-3\varepsilon)).$$

Определим  $\delta = 1/2 \varepsilon_0 \Delta / (B_2 + A_5)$  и положим  $\varepsilon = 1/16 \varepsilon_0 \Delta$ . При достаточно большом  $\omega$  неравенство (24) даст тогда  $\omega(y_0, \omega) > 0$ . Доказательство в случае VIa закончено.

**VIb.** Здесь функция  $\delta c$  скачком изменяется на  $\gamma_1$  (см. рис. 2, в) и потому  $c$  сохраняет знак в некоторой окрестности точки  $x_0$  (пусть  $\delta c \geq 0$ ). Положим  $y_0 = x_0$ . Учтем, что для любого  $x \in Q'' d_1(x) \geq d_1(x_0)$ . Доказательство неравенства  $\omega(y_0, \omega) > 0$ , при достаточно большом  $\omega$ , теперь очевидно.

**VIc.** Здесь доказательство аналогично (и несколько проще) случая VIa.

Теперь мы очень кратко наметим схему рассуждений в случае

**VII.** В этом случае на  $\partial Q''$  нет точек минимума функции  $d_1$ ; они заменяются на точки, которые разыскиваются следующим образом.

Определим функции  $\Phi_q^p(x_2)$  ( $p=1,2; q=1, \dots, n$ ), равные  $l_1$  — расстоянию от точки  $(\varphi_q(x_2), x_2)$ , на  $s_q$  до  $s_0$ , если точка  $(\varphi_q(x_2), x_2)$  является граничной точкой множества  $Q''$  и равные  $B_2 N_1 + 1$  в ином случае ( $\varphi_n \equiv N_1; B_2$  — константа неравенства (7)). Определим

$$\varphi(x_2) = \min_{\substack{p=1,2, \\ q=1, \dots, n}} \Phi_q^p(x_2), \quad d_{\min} = \inf_{x_2 \in R^1} \varphi(x_2).$$

Применяя к функции  $\Phi(x_2) - d \min$  лемму 3', найдем соответствующую точку  $x_e$ . Точка  $y_0$ , в которой при больших  $\omega$   $\omega(y_0, \omega) \neq 0$ , разыскивается в окрестности точки  $x_e$  с достаточно малым  $\varepsilon$  путем применения лемм 2' и 3'' аналогично случаю VI.

Доказательство закончено.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Дмитриеву за постановку задачи и ряд полезных обсуждений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О единственности решения задачи электроразведки. — Докл. АН СССР, 1949, т. 69:6, с. 797—800.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5:3, с. 545—547.
3. Varadhan S. R. S. On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. — Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20:4, p. 431—455.
4. Weidelt P. Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in E-Polarisation. — Dissertation. — Göttingen: Georg-August Universität, 1978.
5. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
6. Гусаров А. Л. К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред. — В сб.: Математические модели задач геофизики. — М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 31—61.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

*А. М. Попов*

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-ПРОЦЕССОВ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

В последнее время сильно возросла роль вычислительного эксперимента в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. Это обусловлено масштабом и важностью экспериментальных исследований, необходимостью конкретизации теоретических представлений о физических процессах в плазме. Важность и острота необходимости математического моделирования термоядерной плазмы токамаков привела к появлению большого числа работ как у нас в стране, так и за рубежом, где в этой области используются наиболее мощные ЭВМ.

Настоящая работа посвящена анализу ряда математических моделей и численных кодов, созданных для изучения магнитогидродинамических (МГД) процессов в высокотемпературной плазме токамака. Чтобы представить себе геометрию магнитного поля, в котором удерживается плазма, рассмотрим простейшую схему токамака, показанную на рис. 1.

Тороидальный плазменный шнур, расположенный внутри металлической камеры, играет роль вторичной обмотки трансформатора. При изменении тока в индукторе трансформатора в плазме возбуждается продольный ток  $I_p$ , создающий собственное полоидальное поле  $H_p$ . Плазменный шнур удерживается в равновесии вертикальным полоидальным полем, созданным внешними проводниками и кожухом. На условия удержания влияет также железный сердечник трансформатора. Стабилизация плазменного шнура достигается за счет наличия сильного тороидального магнитного поля  $H_t \gg H_p$ . Плазма с высокой температурой располагается на замкнутых, вложенных друг в друга тороидальных магнитных поверхностях, образованных винтовыми силовыми линиями.

Для плазмы в установках токамак температура  $T \sim 1 \div 7$  кэВ, концентрация  $n_{i,e} \sim 10^{13} \div 10^{14}$  см<sup>-3</sup>, характерное время удержания  $\tau_y \sim 0,01 \div 0,1$  с. В зависимости от стадии разряда  $T$  и  $n$  могут измениться на несколько порядков.

Мы будем рассматривать такие пространственно-временные

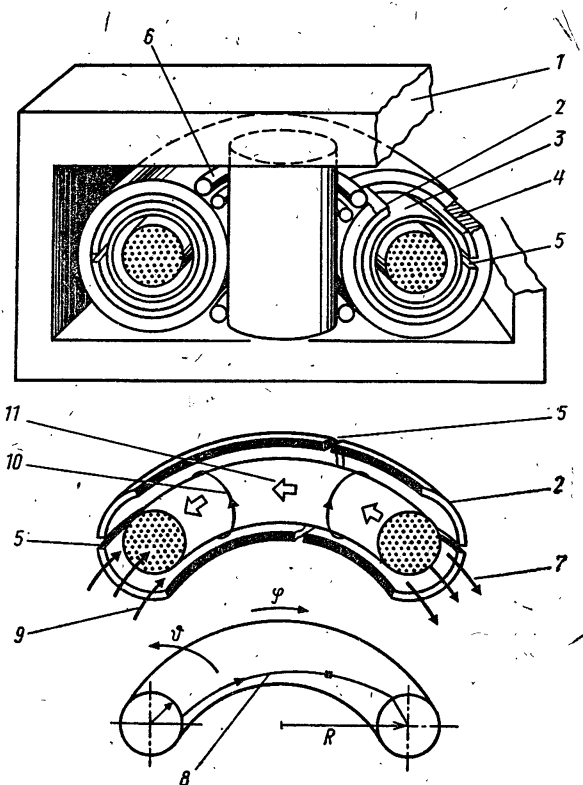


Рис. 1. Схема токамака: 1 — железный сердечник трансформатора; 2 — медный стабилизирующий кожух; 3 — лайнер из нержавеющей стали; 4 — витки торoidalного поля; 5 — изолированные разъемы; 6 — первичная обмотка индуктора; 7 — торoidalное магнитное поле  $H_t$ ; 8 — магнитная силовая линия; 9 — плазма; 10 — полоидальное магнитное поле  $H_p$ ; 11 — ток плазмы  $I_p$

промежутки, когда плазму в сильном магнитном поле можно рассматривать как сплошную среду. В таком случае описание движения плазмы можно сократить до МГД-системы уравнений [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\frac{dj}{dt} = \frac{nc^2}{m_e} \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{VH}] \right) - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{jH}] + \frac{e}{m_e} \nabla P_e - \frac{j}{\tau}. \quad (5)$$

Здесь  $\rho = n_e m_e + n_i m_i$  — плотность плазмы;  $\mathbf{V} = \left( \frac{1}{\rho} n_i m_i \mathbf{V}_i + n_e m_e \mathbf{V}_e \right)$  — средняя массовая скорость;  $P = P_i + P_e$  — полное давление;  $\mathbf{j} = e(zn_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$  — плотность тока;  $\tau$  — время передачи импульса. Неизвестные  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $E$  определяются уравнениями,  $P$ ,  $P_e$  и  $\tau$  определяются высшими моментами.

В силу неопределенности  $P$ ,  $P_e$ ,  $\tau$  система (1) — (5) незамкнута. Уравнение (5) играет роль закона Ома для плазмы. Для плазмы в современных токамаках диссипативные члены в законе Ома имеют порядок  $10^{-6}$  от первого члена. Самая грубая МГД-модель плазмы — идеальная магнитная гидродинамика, в которой отбрасываются со второго по четвертый члены в законе Ома. Их учет необходим, если в плазме есть поверхности, на которых первый член в уравнении (5) обращается в нуль, а второй, третий и четвертый члены несмотря на малость становятся существенными. Окрестности таких поверхностей называют диссипативным слоем. В этом случае строится диссипативная МГД-модель высокотемпературной плазмы.

Граничные условия в системе уравнений (1) — (5) могут самосогласованно учитывать решения электротехнических уравнений для внешних цепей.

Характерные времена развития колебаний, связанных с газокинетическим давлением, давлением магнитного поля, диссипативными процессами в плазме токамака, различаются на несколько порядков. Такое сильное различие во временах позволяет построить три основные модели МГД-процессов: 1) равновесия, 2) устойчивости, 3) нелинейного развития.

Математическое МГД-моделирование должно включать в себя последовательное решение этих проблем.

Рассмотрим задачу о равновесии плазмы в токамаке. В установках токамак время существования плазмы  $\tau_p$  много больше альфвеновского времени  $\tau_H$ . Для современных установок  $\tau_p \sim 0,05$  с,  $\tau_H \sim 10^{-6}$  с. Это означает, что плазма находится в условиях МГД-равновесия. Для описания равновесия в первом приближении можно использовать систему уравнений идеальной магнитной гидродинамики. Опуская производные по  $t$  в (1) — (5) и полагая  $\mathbf{V} = 0$ , получим уравнения равновесия.

Пусть  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — цилиндрические координаты с осью  $z$ , направленной вдоль главной оси тора. Для магнитной равновесной конфигурации токамака характерна аксиальная симметрия, и в большинстве случаев достаточно рассмотреть решения, для которых  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$ . В этом случае удобно ввести функцию магнитного по-

тока  $\psi$  и полоидального тока  $I_B = \frac{c}{2} r \dot{H}_\varphi$ , так что

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\pi r} [\nabla\psi, \mathbf{e}_\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \frac{2I_B(\psi)}{cr}. \quad (6)$$

Линии  $\psi = \text{const}$ , как видно из системы (1) — (5), являются сечениями магнитных поверхностей. В этом случае уравнения магнитостатики приводятся к уравнению относительно функции  $\psi$ , которое называют уравнением Грэда — Шаfranова [2]:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \frac{8\pi^2}{c} r j_\varphi, \quad (7)$$

$$j_\varphi = 2\pi c r \frac{dP}{d\psi} + \frac{2}{cr} I_B \frac{dI_B}{d\psi}.$$

Уравнение (7) содержит две произвольные функции,  $P(\psi)$  и  $I_B(\psi)$ , выбираемые из физических соображений. Задавая  $P(\psi)$  и  $I_B(\psi)$ , можно, решив (7), найти различные равновесные конфигурации. Постановка краевых задач для уравнения (7) определяется методами удержания плазмы в равновесии.

Задачи эти нелинейны даже для линейной функции  $j_\varphi(\psi)$ , так как положение границы плазмы  $\Gamma_p$  заранее неизвестно. Оно определяется в процессе решения задачи (7). Необходимое для удержания тороидальной плазмы поле может быть создано и с помощью внешних проводников с током. В этом случае формулируется задача со свободной поверхностью плазмы в неограниченном пространстве с условиями регулярности на бесконечности для  $\psi$ . Внешние токи входят в правую часть уравнения (7) в области вне плазмы.

Для увеличения магнитного потока, возбуждающего вихревое электрическое поле, часто используют железный сердечник. При насыщении железа часть магнитного потока выталкивается в вакуум (в силу нелинейной зависимости магнитной проницаемости от поля) и поля в области, занятой плазмой, изменяются. Это приводит к необходимости учета железа при нахождении равновесия. При этом в постановке задачи участвуют три области — плазма, вакуума и железа — с существенно различными характеристиками среды [6].

Одновременный учет всех факторов, влияющих на равновесие плазменного шнура, очень сложен и приводит к необходимости численного моделирования равновесия. Первые численные работы были посвящены нахождению решений (7) с помощью полных временных МГД-уравнений с искусственным диссипативным процессом [3]. Такой подход предусматривал и слежение за МГД-эволюцией равновесного состояния. Затем было разработано много методов решения краевых задач непосредственно для уравнения равновесия [2].

В настоящее время в развитии вычислительных методов для задач равновесия можно выделить следующие направления:

— создание специальных алгоритмов расчета равновесия в токамаке с железным сердечником;

— получение численного решения, обладающего высокой гладкостью, с целью использования его в численных моделях устойчивости (например, устойчивости баллонных мод) и нелинейного развития;

— получение стационарных решений МГД-уравнений (7), не обладающих аксиальной симметрией. Нахождение решений как возможного результата нелинейного развития неустойчивости плазмы;

— создание методов, позволяющих выделять решение с заданными свойствами в условиях, когда дифференциальная задача имеет неединственное решение.

Здесь мы остановимся на одном, практически важном, направлении — на создании моделей и численных методов расчета равновесия в токамаке при учете влияния железного сердечника. Задача имеет значение для проектирования режимов работы установки Т-15 с железным сердечником.

Обычно сердечник состоит из центрального цилиндрического ядра и отдельных магнитопроводов (см. рис. 1). Задача о равновесии в этом случае трехмерна. Своеобразной проблемой является построение аксиально-симметричной двумерной модели. Частично такое исследование было проведено группами JET и TFR-600 [4], были получены параметры аппроксимирующей двумерной модели. Однако постановка двумерной задачи остается сложной из-за необходимости расчета полей в таком нелинейном элементе конструкции, как железо.

Для расчета равновесия в установке TFR-600 [4] была построена следующая упрощенная модель. Задача разбивается на два этапа. На первом этапе проводится расчет магнитостатических полей, создаваемых системой проводников с током при наличии железа. Плазма заменяется тонким проводником с током. На втором этапе учитываются условия равновесия. Результатом являются рассчитанные коэффициенты взаимной индукции и эффективности обмоток, используемые далее в электротехнических уравнениях. В упомянутой выше модели, по существу, решается уравнение Пуассона с заданной правой частью в двух областях — железе и вакууме. Для расчета его используется одна из имеющихся во французском центре программ: POISSON и MAGNETIX. В программе POISSON используется метод конечных разностей, в программе MAGNETIX — метод конечных элементов, позволяющий строить решение для сложной геометрии границы железа (в 2D-модели):

Другая модель создана Дойниковым и Бондарчуком в НИИЭФА [5] для расчета равновесия в установке Т-15. На основе ее написана программа МРУР. В этой модели плазменный шнур заменяется набором кольцевых нитей с током. Условия равновесия сводятся к требованию постоянства функции полоидального поля  $\psi = \text{const}$  вдоль границы плазмы.

В указанной модели токи подбираются не автоматически по заданному условию, а в диалоговом режиме по выводимому с



ЭВМ отклонению силовой линии от границы плазмы в выбранных точках и по потокосцеплениям с каждой токовой системой. В соответствии с выводимой информацией время от времени вручную проводится коррекция токов. Здесь очевиден недостаток ручного подбора токов.

Следующий шаг в разработке модели равновесия и вычислительных алгоритмов его расчета был сделан в нашей работе [6] и в работе французских исследователей [7].

В работе [7] рассчитывается равновесие как точное решение уравнения Шафранова. В соответствующей программе SCED используется вариационный подход к решению уравнения равновесия. Значение функции полоидального потока на границе плазмы  $\psi_p$  определяется касанием плазменного шнура диафрагмы:

$$\psi_p = \max_{\Gamma_d} \psi,$$

где  $\psi(r, z)$  — решение задачи;  $\Gamma_d$  — заданная линия (для TFR — окружность, для JET — имеет D-форму), играющая роль диафрагмы. При этом внутри диафрагмы плазма может принять любую форму. Внешние токи подбираются из условия сшивки тангенциальных компонент поля в среднеквадратичном смысле.

Использование формулы Грина и граничных условий привело к вариационной формулировке задачи:

$$a_\mu(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^k \frac{I_i}{S_i} \int_{\Omega_{C_i}} \varphi d\Omega + \int_{\Omega_p} j_\varphi(r, \psi) \varphi d\Omega,$$

где

$$a_\mu(\psi, \varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu r} (\nabla\psi, \nabla\varphi) d\Omega.$$

Требуется найти функцию  $\psi(r, z)$  в  $\Omega$ , свободную границу плазмы  $\Gamma_p$ , токи в катушках  $I_i$ . Функции  $\mu(B_p^2)$  и  $j_\varphi(r, \psi)$  считаются заданными.  $\varphi$  — любая функция, принадлежащая некоторому подпространству  $V$  пространства  $L^2(\Omega)$ .

Показано, что в выбираемом подпространстве вариационная и дифференциальная задачи эквивалентны. Для нахождения решения применяется метод конечных элементов.

Следует отметить, что, время, затрачиваемое на нахождение равновесия в программе SCED, не так уж мало. Учитывая пятнадцатикратное преимущество в скорости СДС-7600, нетрудно увидеть, что регулярный расчет предложенным методом занимал бы на БЭСМ-6 8 мин. Это в четыре раза медленнее, чем работает наша программа FEQU [6] по такому же числу точек.

В работе [6] разрабатывается модель равновесия плазмы в токамаке с железным сердечником, основанная на точных дифференциальных уравнениях равновесия и нелинейных уравнениях поля в ферромагнетике. Задача формулируется в двух областях:

в области плазма — вакуум, где разыскивается решение нелинейного уравнения (7) со свободной границей; и в области железа, где решаются нелинейные уравнения поля. Знание двумерного решения задачи о равновесии  $\psi(r, z)$  и решений магнитостатических задач позволяет вычислять индуктивности обмоток системы полоидального поля. В присутствии нелинейного элемента — железа — индуктивности будут зависеть не только от расположения и формы проводников, но и от величин всех источников поля. Выделяется один параметр, характеризующий состояние источников

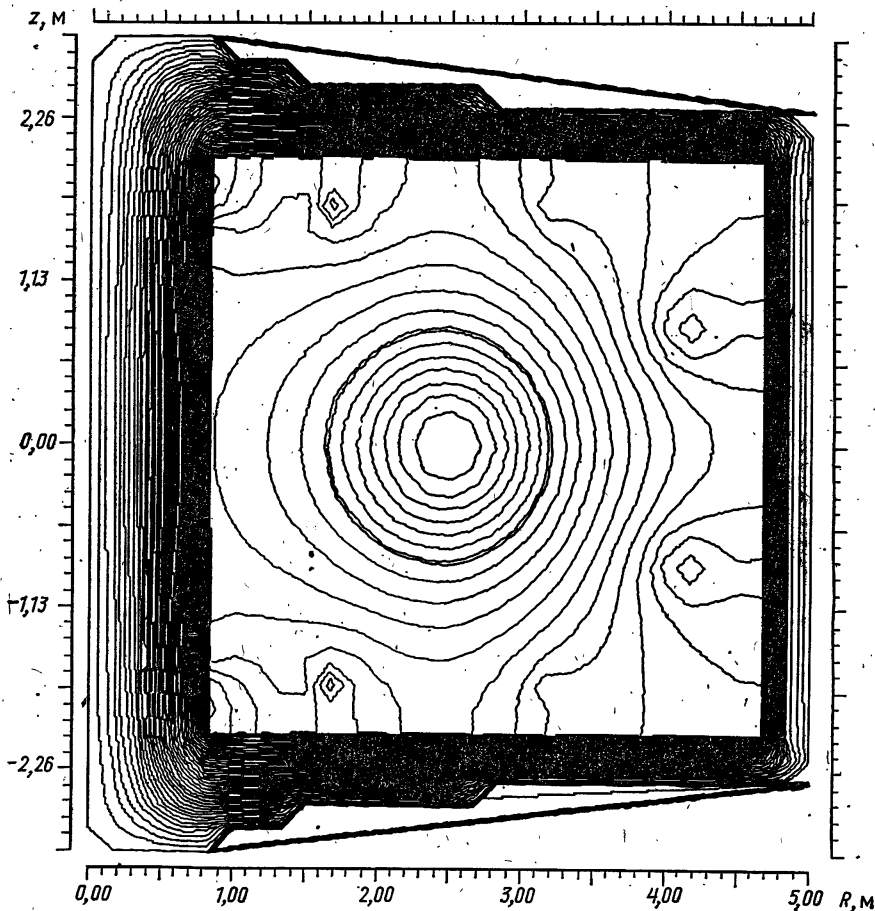


Рис. 2. Линии уровня  $\psi = \text{const}$  в равновесии при  $I_p = 0,2800$ ;  $I_1 = -0,0895$ ;  $I_2 = -0,4000$ ;  $I_3 = -0,02470$ ;  $I_4 = 2,4254$  МА;  $\beta_J = 0,0600$ ;  $\psi_p = 6,1477$  В·с

поля и железа, от которого находятся зависимости индуктивностей. Найденные индуктивности можно использовать далее в задачах управления положением плазмы.

В отличие от последнего французского кода SCED в нашем коде FEQU в основе алгоритмов лежит метод конечных разностей [1, 6]. Здесь построен и исследован ряд итерационных алгоритмов (в отличие от программ МРУР (НИИЭФА)) автоматически выбирать управляющие токи по заданному положению плазмы и ее формы. Это позволило получить целый ряд равновесных состояний для различных моментов разряда в условиях Т-15. На рис. 2 показаны линии уровня потенциала магнитной индукции в равновесии для установки Т-15, рассчитанные по коду FEQU.

В реальном эксперименте могут быть осуществимы лишь устойчивые равновесные состояния. Поэтому необходимо исследовать вопрос о макроскопической устойчивости плазмы. Среди макроскопических неустойчивостей особое место занимают винтовая и аксиально-симметричная неустойчивости, обладающие наибольшими инкрементами. Аксиально-симметричная неустойчивость свойственна диверторным равновесным конфигурациям с некруглым поперечным сечением плазменного шнура, в котором плазма ограничена сепаратрисой магнитных поверхностей. В случае равновесия с вытянутым вдоль главной оси тора поперечным сечением этот тип неустойчивости представляет собой быстрое смещение плазменного шнура как целого по вертикали к стационарной точке сепаратрисы с альфвеновской скоростью порядка  $10^8$  см·с<sup>-1</sup>.

Аксиально-симметричная неустойчивость отсутствует в «стандартных» токамаках с круглым поперечным сечением плазменного шнура. Для таких установок существенна винтовая неустойчивость, возникающая из-за наличия продольного тока в плазме и винтовой структуры магнитных силовых линий. В условиях ее дестабилизации силовые линии (вмороженные в плазму) из-за максвелловских натяжений приводят к винтообразным смещениям плазменного шнура со скоростью  $10^6$ — $10^7$  см·с<sup>-1</sup>.

В создании моделей и численных методов решения задач МГД-устойчивости в настоящее время можно выделить следующие проблемы:

- моделирование МГД-процессов с существенно различными характерными временами;

- получение полных спектров для простейших моделей плазмы. Повышение точности в определении границ устойчивости;

- определение областей и инкрементов неустойчивостей плазмы в токамаке с некруглым поперечным сечением с учетом влияния стабилизирующих проводников, железа и других элементов конструкции;

- достижение высокой точности в расчете собственных функций и инкрементов при наличии узких резонансных слоев;

- снижение времени вычислений и используемой памяти;

- расширение модели плазмы. Включение в рассмотрение всех членов в законе Ома (5).

Развитие численных методов решения линеаризованных задач

происходит по двум направлениям: поиск новых алгоритмов для решения временных дифференциальных уравнений с начальными условиями и совершенствование вариационных методов нахождения минимума потенциальной энергии плазмы. Впервые временной подход был развит в нашей работе [8], в которой численными методами изучалась неустойчивость винтовых мод в идеальной МГД-модели плазмы со свободной границей. Рассматривалась простейшая геометрия — круглый плазменный цилиндр. Метод состоял в решении задачи Коши для МГД-уравнений. Со временем из произвольного начального условия выделялось экспоненциально растущее решение с наибольшим инкрементом. Результатом являлся профиль собственной функции, соответствующей этой наиболее неустойчивой моде, и ее инкремент.

На устойчивость внутренних винтовых мод существенно влияет учет тороидальности и некруглой формы поперечного сечения плазмы, но слабо влияют условия на границе плазмы. Эти моды обычно рассматривают в модели с закрепленной границей плазмы [1]. В нашем линейном коде ЛИИТ [9] задача сводится к двумерной путем разложения в ряд Фурье по продольной угловой координате  $\varphi$  и содержит четырнадцать комплексных уравнений. Вычисления по программе ЛИИТ позволили изучить влияние различных членов в законе Ома (5) на развитие диссипативных неустойчивостей.

Узкое место в указанных выше кодах было связано с условием Куранта на шаг по времени. Это условие определялось наличием в полной МГД-системе быстрых альфвеновских волн, связанных с большим продольным полем. Переход к редуцированной системе МГД-уравнений, полученной Кадомцевым и Погуце [10] для рассмотрения нелинейных винтовых волн, стимулировал численные исследования диссипативных мод. В редуцированной системе были исключены быстрые альфвеновские волны.

Переход к численному моделированию на основе редуцированной системы привел к созданию быстро работающего кода ЛИРЕК [11]. В этом коде использовано разложение в ряд Фурье по угловой и продольной координатам плазменного цилиндра и задача сведена к одномерной. Одномерность задачи позволяет получать высокую разрешающую способность численной схемы. При числе точек  $N_r = 200 \div 800$  по радиусу вычисления длятся от 30 с до 2 мин на БЭСМ-6.

Необходимость изучения аксиально-симметричной неустойчивости в токамаке с полоидальным дивертором привела к созданию новой двумерной модели [12] и разработке на ее основе временного самосогласованного кода АКСУ. Комплекс программ АКСУ позволяет вначале рассчитывать равновесие в токамаке с вытянутым поперечным сечением и произвольным распределением тока, затем рассчитывать аксиально-симметричную устойчивость этого равновесия [12]. Модель состоит в описании движения плазмы с помощью линеаризованной двумерной системы уравнений несжимаемой МГД со свободной границей плазмы.

С помощью развитой методики проведено изучение устойчивости диверторных конфигураций плазмы в экспериментальных установках Т-12, ИНТОР.

Временной подход, использованный в упомянутых кодах, обладает рядом преимуществ:

— относительная простота реализации и перестройки алгоритмов;

— использование небольшой машинной памяти, что дает возможность реализовать вычисления на БЭСМ-6;

— гибкость в расширении модели плазмы и включения различных диссипативных эффектов;

— универсальность алгоритмов, слабая их зависимость от геометрии плазмы, обобщения на нелинейный случай.

К недостаткам временного подхода следует отнести:

— трудности в вычислении полного МГД-спектра;

— падение точности при описании сингулярных мод и коротковолновых возмущений (большое  $n$ ) в идеальной МГД-модели.

Вариационные методы позволяют определить полный МГД-спектр. Они основаны на задаче на собственные значения. Обычно используется лагранжиан, связанный с линеаризованными возмущениями равновесной конфигурации:

$$U = \omega^2 K(\xi^*, \xi) - \delta\omega(\xi^*, \xi).$$

В наиболее развитом коде PEST (Р. Гримм и др. [13], США) применяется метод Галеркина. В нем использовано представление возмущения в виде рядов Фурье по угловым координатам  $\theta$  и  $\varphi$  на магнитных поверхностях ( $\psi = \text{const}$ ):

$$\xi(\psi, \theta, \varphi) = \sum_{m=-M} \sum_{l=1} \xi_{ml} u_l(\psi) \exp[i(m\theta - l\varphi)].$$

Коэффициенты  $\xi_{ml}$  определяются из уравнения нормальных мод. В первой версии PEST использовались лишь «регулярные» конечные элементы для представления функций  $u_l(\psi)$ , описывающих смещения, нормальные к магнитным поверхностям. Функции представляют собой «шалашик», обращаясь в нуль всюду за исключением интервала  $\psi_{l-1}, \psi_{l+1}$ . Значение  $\psi_l$  обозначает расположение  $l$ -го узла. На аналогичном методе построен код ERATO (Бергер и др. [14], Швейцария).

Развитие кодов, основанных на вариационном подходе, шло по двум направлениям: переход к описанию диссипативных мод и более точное описание сингулярных мод в идеальной МГД-модели. Обе проблемы связаны с сильным увеличением числа членов разложения в методе Галеркина. Частично эти проблемы решены созданием второй версии кода PEST. Изменения связаны с дополнением системы «регулярных» конечных элементов сингулярными элементами, отличными от нуля лишь в окрестности резонансной поверхности. Эти сингулярные элементы берутся из аналитически найденного асимптотического сингулярного решения в окрестности резонансной поверхности  $\psi_s$ .

$$u_m = |\psi - \psi_s|^\lambda \operatorname{sgn} |\psi - \psi_s| - \left( \frac{\psi - \psi_s}{\delta_l} \right) \delta_l^\lambda,$$

$$\lambda = \lambda(\omega^2).$$

Описанный прием позволяет авторам кода надеяться на расширение метода для изучения диссипативного МГД-режима.

Вариационные подходы обладают определенными недостатками:

- громоздкость задачи определяет сильные требования к машинной памяти, а вычисления большого количества членов требуют значительного времени;

- неудачный выбор системы координат и функций разложения может существенно повлиять на количество членов разложения. Например, при фиксированной эллиптичности сечения плазмы для сходимости требуются очень высокие значения  $L$ . Простого правила, где обрывать разложение, не существует;

- для высших собственных значений (при вычислении которых используется вариационный принцип в соответствующем подпространстве, ортогональном к низшим модам) и особенно для мод вблизи границы устойчивости необходимы значительно более высокие значения  $L$ ;

- очень сложны, алгоритмически, всякие изменения и обобщения, например на диссипативный или нелинейный случай.

Временной и вариационный подходы к исследованию устойчивости хорошо дополняют друг друга и приводят к взаимному совершенствованию алгоритмов.

Исследование устойчивости плазмы в линейном приближении недостаточно для понимания и объяснения экспериментов. После того как определена линейная устойчивость МГД-мод, полученные собственные функции могут быть использованы для начала нелинейных вычислений, в которых они продолжают свой рост до некоторого конечного состояния.

Развитие нелинейных МГД-моделей происходит в настоящее время по следующим направлениям:

- выяснение возможности нелинейной стабилизации отдельных видов линейно-неустойчивых мод: внутренние локальные винтовые моды. Эти модели приводят к 2D-уравнениям с винтовой симметрией;

- изучение нелинейного взаимодействия различных мод. Выяснение влияния большого давления, различного сопротивления плазмы, тороидальности. Эти модели приводят к трехмерным уравнениям;

- исследование винтовых равновесий плазменного шнура как результата нелинейного развития;

- изучение общих трехмерных движений в полных диссипативных МГД-моделях.

В нелинейных моделях возникают новые особенности в поведении плазмы, которые необходимо аккуратно рассчитывать. Появляются большие градиенты полей, локализованные пики

токов в окрестности изменяющихся резонансных поверхностей, приповерхностные токи при нелинейном движении свободной границы плазмы. Длительность нелинейных расчетов является основным ограничением в получении полной нелинейной картины.

Понятны и трудности в выборе методов и разработке алгоритмов. Сильно сказывается отсутствие хороших тестов и автоматических решений в многомерном случае. Особое место в такой ситуации приобретает сравнение результатов, полученных с помощью различных методов и кодов.

В 1976 г. автором впервые в СССР создан трехмерный код TOP [15], с помощью которого исследовалось взаимодействие различных мод с полной МГД-модели. Использовалась явная схема класса предикатор-корректор на эйлеровой сети. Диффузионные члены рассматривались по методу Дюфора — Францкела. Во всех этих кодах плазма приходила до идеально проводящей границы, имеющей форму прямоугольника в поперечном сечении. Сайксом и Вессоном [16] развиты эйлеровы коды NONLIN и TORUS, которые включали тензор сопротивления и теплопроводности. В трехмерных кодах TOP, NONLIN, TORUS используются практически одни и те же алгоритмы, однако вычисления по коду TORUS происходят значительно быстрее (примерно в 8 раз) за счет использования параллельных вычислений на матричном процессоре DAP машины ICL-2900.

Все указанные коды должны были удовлетворять условию Курантана на шаг по времени  $\tau$ . Вообще говоря, этот шаг  $\tau$  намного меньше, чем шаг, требуемый временной шкалой физических неустойчивостей. В частности, большие ограничения накладывали быстрые альфвеновские волны по продольному полю. Кроме того, существенным недостатком являлись длительность расчетов и слабая разрешающая способность кодов из-за малого числа точек сети.

Все это обусловило развитие методов моделирования в двух различных направлениях. В первом — создавались упрощенные, редуцированные МГД-системы уравнений, в которых путем разложения по малому параметру исключались быстрые альфвеновские волны, мало интересные для токамаков. Во втором направлении продолжается создание универсальных численных методов и кодов для интегрирования полной МГД-системы. Разумеется, такое деление условно, так как методы развития второго и первого направлений дополняют друг друга и во многом пересекаются.

Остановимся вначале на втором направлении. Брэкбилл [13] создал МГД-код для идеальной плазмы с использованием движущейся эйлерово-лагранжевой обобщенной сети для достижения хорошей разрешающей способности. Джордан и Джонсон [17] развили «метод динамических сеток» в трех измерениях. В этой работе использован «токамачный» порядок для сведения трехмерного неявного алгоритма к ряду двумерных неявных решений, связанных с явным решением в третьем измерении. Однако, на-

сколько нам известно, этот метод, привел к настолько громоздкой реализации алгоритмов, что длительность решения сократилась незначительно, несмотря на ликвидацию ограничений на шаг по времени, связанных с быстрыми волнами.

В настоящее время необходимо и весьма интересно широкое опробование дискретных математических моделей, построенных на использовании принципа наименьшего действия [18]. Этот подход, предложенный Головизниным, Самарским, Фаворским, интересно использовать при многомерном моделировании в плазме при наличии узких диссипативных слоев.

Остановимся на двух подходах, использованных при моделировании диссипативной плазмы в токамаке. Финаном и Киллином [19] создана программа IMP (Implicit MHD Program), не имеющая ограничений на шаг по Куранту. Временной шаг в 10—50 раз превышает условие Куранта. Уравнения решаются неявным методом переменных направлений на неоднородной эйлеровой сетке, который является расширением обычного неявного метода переменных направлений Дугласа—Ганна на случай трех измерений.

Другим интересным подходом, предназначенным для решения проблемы разрешающей способности в многомерном случае, является использование метода конечных элементов. Выделим особо недавно предложенный Каваками [20] метод FEMALE для решения полной трехмерной МГД-системы. Область плазмы разбивается на конечные элементы. Вершины конечных элементов — узлы — движутся произвольно. В каждом элементе задается некоторым образом координатная функция  $\Phi^u$ , отличная от нуля только в элементе  $u$ . Таким образом, получается набор из  $N$  координатных функций.

Работа по этому методу только начата. Однако очевидно, что метод требует большой машинной памяти и сложность реализации алгоритма определяется длительностью расчетов. Одной из особенностей, непонятых авторами метода, является зависимость численного результата от формы элемента.

Существенно дальше продвинуться в численном моделировании процессов в плазме позволил переход к редуцированной системе Кадомцева — Погуце [10]. Отметим, что система (например, в цилиндрическом случае) содержит всего три неизвестные функции (что существенно ослабляет требования на машину памяти), две из которых  $\psi(r, \theta, z, t)$  и  $u(r, \theta, z, t)$  — функции поперечных потоков магнитного поля и скорости ( $H_{\perp} = [\nabla\psi, e_z]$ ,  $V_{\perp} = [\nabla u, e_z]$ ), а третья  $\omega = (\text{rot } V)_z$  — продольная компонента вихря скорости. Введение потенциалов  $\psi$  и  $u$  позволяет автоматически учитывать условие несжимаемости в поперечном направлении при численных расчетах. Несмотря на существенные упрощения система остается очень сложной для численного решения.

Редуцированная система в линейном приближении хорошо описывает неустойчивость винтовых диссипативных мод и внешней винтовой моды со свободной поверхностью.



В модели с закрепленной границей плазмы с конечной проводимостью, автором был создан первый нелинейный двумерный код РЕНК-2 [21].

Вычисления по коду РЕНК-2 позволили впервые провести численное моделирование процесса срыва в релаксационных колебаниях. Развитие алгоритмов и модернизация кода РЕНК-2 позволили изучить нелинейное развитие диссипативных tearing-мод с  $m/n \geq 2$  и проследить образование и эволюцию магнитных островов [21].

В случае идеальной проводимости в [22] был создан код MASS и в [23] — диссипативные коды RS2 и RS3. В них использована трехслойная по времени разностная схема класса предиктор-корректор.

Попытка использования этой схемы для описания свободной границы [11] или резких профилей тока приводит к неудовлетворительным результатам. В силу плохих дисперсионных свойств схемы на распределении тока появляются растущие пилообразные колебания, распространяющиеся в радиальном направлении.

Для того чтобы получить требуемое разрешение для неустойчивостей с малыми  $Re_m^{-1} \sim 10^{-6}$  и уменьшить время вычислений, в недавно развитых 2D- и 3D-кодах использовано разложение по Фурье-гармоникам в одном или двух направлениях с конечными разностями или конечными элементами в оставшихся направлениях. В трехмерных кодах TOP, TORUS, RS3 с сеткой по всем направлениям проявляется так называемая сеточно-резонансная проблема. Комбинация  $\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial \theta}$  появляется в двух уравнениях редуцированной системы. Она обращается в нуль на резонансной поверхности и должна быть аккуратно вычислена. Вместо того чтобы быть равной  $(-n+m/q)$ , она дает  $(-\tilde{n} + \tilde{m}/q)$ , где  $\tilde{n} = n[1 - (nh_z^2/6)]$ ;  $\tilde{m} = m[1 - (mh_\theta)^2/6]$ .

Написанные на основе метода Фурье коды RSF и RST Карераса и Хикса [23] и наш код РЕФЗ [11] дают для описания модели с закрепленной границей очень хорошие результаты. Метод состоит в разложении искомых функций по винтовым гармоникам:

$$\psi(r, \theta, z, t) = \psi_{00} + \sum_p \sum_{m/n=p} \psi_{mn}(r, t) \cos(m\theta \mp nz).$$

Для  $\psi_{mn}(r, t)$  получается цепочка одномерных уравнений, решаемых смешанным явно- неявным способом. Уравнение для  $\psi$  решается трехслойным явным алгоритмом предиктор-корректор, для  $\psi$  пишется НМПН. Вычисления проводятся в пространстве  $(r, m, n)$ . Для каждого варианта расчета выбирается набор мод  $(m, n)$ . Низшие моды  $n \leq N$ ,  $-M \leq m \leq M$  превалируют в задаче.

Эффективно выбирать моды в соответствии с порядком схемы. Обычно оставляют семь мод: 0/0, 2/1, 3/2, 4/2, 5/3, 1/1, 6/3. Коды RSF и РЕФЗ обладают большим преимуществом по сравнению с

другими, например кодами NONLIN и TOP. Две причины обуславливают это преимущество: малое число мод дает лучшее представление физических функций, чем дает большое число точек, и свертка в RSF и РЕФЗ делается очень быстро.

В двумерном случае, когда присутствует одна винтовая симметрия  $m/n=p=\text{const}$ , расчет одного варианта длится 1,5 ч по сети в 200 точек на радиус на машине БЭСМ-6. Трехмерные расчеты по сети в 200 точек на радиус и при включении семи мод требуют четырех-пяти часов.

Вычисления по коду РЕФЗ позволили найти область нелинейного взаимодействия винтовых волн для установок Т-10 и Т-7. На рис. 3 показаны парциальные линии уровня винтового потен-

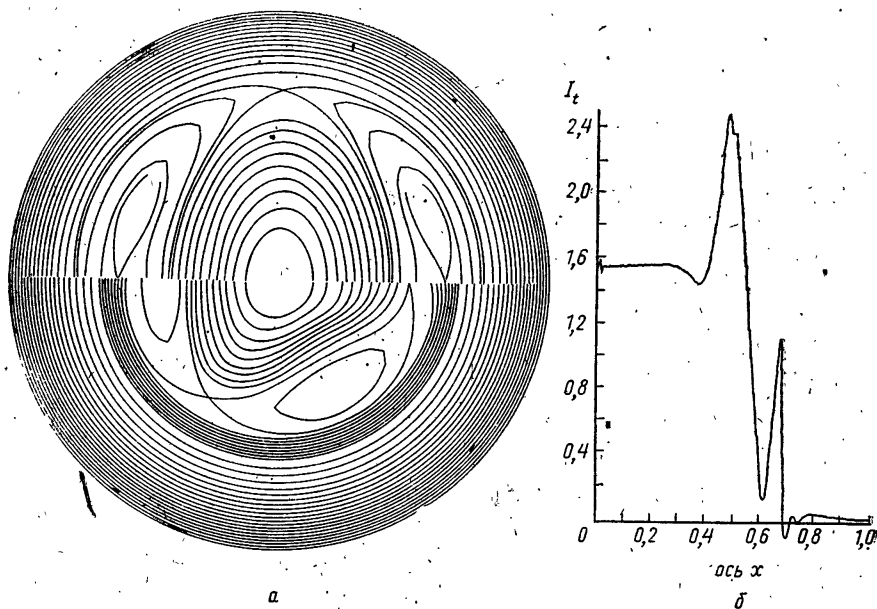


Рис. 3. а) Линии уровня винтовых потенциалов  $\Psi_{*p}=\text{const}$  при нелинейном взаимодействии мод. Контур  $\Psi_{*2/1}=\text{const}$  для моды 2/1 показаны на верхней половине рисунка, контур  $\Psi_{*3/2}=\text{const}$  для моды 3/2 — на нижней половине рисунка.

б) Профиль плотности торондального тока в безразмерных единицах.

циала для двух основных мод, участвующих в нелинейном взаимодействии, в один из моментов времени в трехмерном расчете.

К недостатку кодов типа РЕФЗ, RST следует отнести возникновение больших трудностей при попытке расширения модели. Переход к моделированию свободной границы с резким изменением сопротивления требует включения огромного числа мод, равного числу расчетных точек в двумерной сети, или особого выбора конечных элементов.

Наш двумерный код РЕМП в винтовых переменных позволяет устойчиво рассчитать нелинейную стадию и ликвидирует ряд недостатков, присущих описанным кодам. В нем используется трехслойная схема класса предиктор-корректор. Аппроксимация переносных членов — якобианов в редуцированной системе — делается при учете интегральных законов сохранения, свойственных исходной дифференциальной системе. Расчеты для хорошо разрешающей способности при  $Re_m^{-1} = 10^{-6}$  требуют достаточно мелкой разности сети. Вычисления по сетке  $75 \times 16$  ( $r \times \theta$ ) делятся 2 ч на БЭСМ-6.

Таким образом, для описания нелинейной стадии в модели с закрепленной границей в 2D- и 3D-случаях при не слишком крутых начальных профилях предпочтительнее использование кодов типа РЕФЗ и RST. Для 2D-моделей со свободной границей преимуществами обладает код РЕМП, позволяющий рассматривать различные модели сопротивления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Моделирование МГД-процессов. — В кн.: Математическое моделирование плазмы. — М.: Наука, 1982, с. 127—218.

2. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Равновесие плазмы с током в тороидальных системах. — В кн.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоиздат, 1982, вып. 11, с. 118—235.

3. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М. Численный расчет равновесия в системах токамак. — ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 11, с. 2255—2260.

4. Blum J., Cissoko G., Dei Cas. Developments of MAKOKOT code. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., — IAEA, Vienna, 1979, v. 1, p. 521—534.

5. Бондарчук Э. Н., Дойников Н. И., Мингалева Б. С. Численное моделирование равновесия плазмы в токамаке при наличии ферромагнетика. — ЖТФ, 1977, т. 47, с. 521—526.

6. Computation of plasma equilibrium in tokamak with iron core / Yu. N. Dnestrovskij, D. P. Kostomarov, A. M. Popov, S. V. Tsaur. — In: Proc. of the X<sup>th</sup> Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics. — Moscow, 1981, v. 1, p. B-14.

7. Blum J., Le Fall J., Thooris B. The selfconsistent equilibrium and diffusion code SCED. — EUR—CEA—FC—1120, 1981, p. 36.

8. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М. Винтовая неустойчивость плазмы с распределенным током. — ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 9, с. 1825—1838.

9. Попов А. М., Шагинов Э. А. МГД-модели для изучения устойчивости внутренних мод в токамаке. — В сб.: Математическое моделирование кинетических и МГД-процессов в плазме / Под ред. Д. П. Костомарова. — М.: Изд-во МГУ, 1979, № 8, с. 55—78.

10. Кадомцев Б. Б., Погуде О. П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаках. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2, с. 575—589.

11. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М., Шагинов Э. А. Нелинейное развитие винтовых мод в токамаке с малым  $q$ . — В сб. докл. Европейской конф. по управляемому синтезу и физике плазмы. — Аахен (ФРГ), 1983, т. 1, с. 52.

12. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М., Сычугов Д. Ю. Стабилизация вертикальной неустойчивости в токамаке с дивертором. — Физика плазмы, 1984, т. 10, вып. 4, с. 519—521.

13. Вычислительные методы в физике / Под ред. Дж. Каиллина, пер. с англ. Ю. Н. Днестровского, Д. П. Костомарова. — М.: Мир, 1980, с. 480.
14. ERATO stability code / R. Gruber, F. Troyon, D. Berger, et al. — Computer Physics Communications, 1981, v. 21, p. 323—371.
15. Three dimensional code for studying of MHD motion of tokamak plasma / A. F. Danilov, Yu. N. Dnestrovskij, D. P. Kostomarov, A. M. Popov. — In: Proc. of the 8-th Europ. Conf. on Contr. Fusion and plasma Physics. — Prague, 1977, v. 1, p. 48.
16. Sykes A. Developments of the Culham 3D Nonlinear MHD-code. — Comp. Phys. Communications, 1981, v. 24, p. 437—439.
17. Jardin S. C., Johnson J. L. — In: Proc. Eighth Conf. on Numerical Simulation of Plasmas, Paper DB-2, GA, LLNL Report CONF-780614, 1978.
18. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Об использовании принципа наименьшего действия для построения дискретных математических моделей в магнитной гидродинамике. — Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 5, с. 1083—1086.
19. Finnan III C. H., Killen J. Solution of the time-dependent, three-dimensional resistive MHD equations. — Computer Physics Commun., 1981, v. 24, p. 441—463.
20. Kawakami I. Finite Element Method for 3D MHD Simulations. — In: Proc. of US-Japan theory workshop on 3D MHD studies for toroidal devices, 1981, p. 207—216.
21. Данилов А. Ф., Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М. Нелинейные винтовые волны в плазме с учетом конечной проводимости. — Физика плазмы, 1976, т. 2, вып. 1, с. 167—170.
22. Rosenbluth M. N. et al. — Numerical Studies of Nonlinear Evolution of Kink Modes in Tokamaks. — Phys. Fluids, 1976, v. 19, N 12, p. 1987—1996.
23. Lynch V. E., Carreras B. A., Hicks H. R. et al. — Resistive MHD studies of High  $\beta$  tokamak plasmas. — Computer Physics Communications, 1981, v. 24, p. 465—476.

*В. Ф. Андреев*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ РАЗРЯДА В ТОКАМАКЕ

1°. Введение. При моделировании процессов в плазме токамака важное место занимает задача равновесия плазменного шнура в токамаке с железным сердечником. Равновесные положения плазмы с учетом ферромагнетика были получены в работе [1]. Переход от расчета равновесия в заданный момент времени к моделированию временной эволюции разряда требует учета меняющихся параметров плазмы, т. е. изменение токов во внешних управляющих обмотках должно проводиться согласованно.

В работе [2] временные зависимости тока в плазме и во внешних тороидальных проводниках получались из электротехнических уравнений, записанных для каждой обмотки и для плазменного шнура. В [2] не учитывался ферромагнетик, поэтому коэффициенты взаимной индукции в электротехнических уравнениях постоянны.

В работе [4] были рассчитаны управляющие токи, ток в индукторе при требуемом временном ходе тока в плазме с учетом ферромагнетика. Равновесие сводилось к условию постоянства

магнитного потока вдоль границы плазменного шнура в шести симметрично расположенных точках.

В данной работе проводится моделирование временных зависимостей интегральных характеристик разряда — тока в плазме, тока в индукторе и токов в управляющих обмотках в присутствии железного сердечника. Ферромагнетик учитывается через нелинейные коэффициенты взаимной индукции, входящие в систему электротехнических уравнений.

2°. Модель. Временные зависимости токов будем получать из уравнений Кирхгофа. Коэффициенты в электротехнических уравнениях введем следующим образом.

Обозначим  $\Phi_i$  — поток, проходящий через контур  $i$ -го проводника, в общем случае  $\Phi_i = \Phi_i(I_1, I_2, \dots, I_n, I_p)$ . Представим поток  $\Phi_i$  квазилинейной функцией токов, т. е.

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n,p} L_{ij} I_j, \quad (1)$$

где через  $L_{ij}$  обозначены нелинейные коэффициенты взаимной индукции. Для управления положением плазменного шнура в течение разряда требуется знать полоидальное поле, которое необходимо для удержания плазмы в равновесии в заданном месте. Это поле представим квазилинейной функцией всех токов

$$B_v = \sum_{j=1}^{n,p} b_v^j I_j, \quad (2)$$

где  $b_v^j$  — эффективности обмотк.

Форма плазмы определяется показателем спада вертикально-го удерживающего поля

$$n_v = - \frac{R}{B_v} \frac{\partial B_v}{\partial R}. \quad (3)$$

Обозначим  $\partial b_v^j / \partial R = b_{rv}^j$ .

Введенные величины  $L_{ij}$ ,  $b_v^j$ ,  $b_{rv}^j$  зависят от всех источников поля  $L_{ij} = L_{ij}(I_1, \dots, I_n, I_p)$ ,  $b_{rv}^j = b_{rv}^j(I_1, \dots, I_n, I_p)$ , что является следствием нелинейных свойств, вносимых железом.

Обилие независимых переменных ведет к необходимости построения более упрощенной модели. Введем  $\Phi$  — магнитный поток, проходящий через экваториальное сечение индуктора. Величина  $\Phi$  — самая существенная переменная, характеризующая состояние магнитной системы, поэтому ее выбираем в качестве единственной независимой переменной в упрощенной модели. Заметим, что введение такой универсальной характеристики, позволяет всего один раз рассчитать зависимости  $L_{ij}(\Phi)$ ,  $b_v^j(\Phi)$ ,  $b_{rv}^j(\Phi)$ , чтобы потом их использовать при получении различных сценариев разряда.

Для определения  $L_{ij}$ ,  $b_v^j$ ,  $b_{rv}^j$  решаются двумерные магнито-статические задачи (МСЗ):

$$\Delta^* \psi_1 = -rI(r, z) \text{ в } S_v,$$

$$\Delta_\mu^* \psi_2 = 0 \text{ в } S_\mu,$$

$$\psi_2|_\Gamma = 0, \quad \psi_1|_j = \psi_2|_j \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \Big|_j = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \Big|_j, \quad (4)$$

$$I = \sum_{j=1}^{n,p} I_j \delta(r-r_j, z-z_j),$$

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta_\mu^* = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\mu} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

где  $\Gamma$  — внешняя,  $\gamma$  — внутренняя границы магнитопровода;  $S_v$  — вакуумная область;  $S_\mu$  — железный сердечник;  $I_j, r_j, z_j$  — ток и координаты  $j$ -го проводника;  $\mu = \mu(|B|)$  — магнитная проницаемость железа.

Из (4) получаем распределение потенциала  $\psi$  при заданных внешних токах. По следующим формулам определяем

$$L_{ij} = \frac{2\pi\psi_i}{cI_j}, \quad b_v^i = \frac{B_v}{I_j}, \quad b_{rv}^i = \frac{1}{2\Delta} (b_v^i(R_0 + \Delta) - b_v^i(R_0 - \Delta)), \quad (5)$$

$$\psi_i = \psi(r_i, z_i), \quad B_v = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (r=R_0, z=0).$$

3°. **Постановка задачи.** Математическая постановка задачи временного развития разряда в токамаке с железным сердечником имеет вид:

$$I_i R_i + N_i \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{n,p} N_j L_{ij}(\Phi) I_j \right) = \mathcal{E}_i \quad (i=1, 2, \dots, n, p),$$

$$\left( \frac{-I_p}{10R_0} \right) \left( \ln \frac{8R_0}{a_0} + \beta_J + \frac{1}{2} (l_i - 3) \right) = \sum_{j=1}^{n,p} N_j b_v^i(\Phi) I_j, \quad (6)$$

$$n_v = -R \frac{\sum_{j=1}^{n,p} N_j b_{rv}^j(\Phi) I_j}{\sum_{j=1}^{n,p} N_j b_v^j(\Phi) I_j} \Big|_{R=R_0}$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n,p} N_j L_{ij}(\Phi) I_j \quad (i=1, 2, \dots, n, p).$$

Здесь  $n$  — число внешних стационарных обмоток управления; индекс  $p$  — относится к плазменному шнуру;  $I_i$  — ток в одном вит-

ке  $i$ -й обмотки;  $R_i, N_i$  — сопротивление и число витков  $i$ -й обмотки;  $\mathcal{E}_i$  — внешнее напряжение, приложенное к  $i$ -й обмотке.

Для плазменного шнура  $\mathcal{E}_p=0$ ;  $N_p=1$ ;  $I_p$  — полный ток в плазме;  $R_p, R_0, a_0$  — соответственно сопротивление, большой и малый радиусы плазмы;  $\beta_J$  — отношение среднего газокинетического давления к давлению магнитного поля;  $l_i$  — внутренняя индуктивность плазменного шнура.

**4°. Метод расчета коэффициентов.** Опишем алгоритм вычисления индуктивностей и эффективностей. Диапазон изменения потока выбирается в соответствии с опорным сценарием разряда работы [4], в этом сценарии насыщается только kern железного сердечника. Алгоритм расчета индуктивностей:

- 1) полагаем все токи, кроме  $I_j$ -го равными нулю;
- 2) решаем МСЗ (4) и находим  $\psi(r, z)$ ;
- 3) в силу формул (5) определяем  $L_{ij}, b_{vj}, b_{jrv}$ . Для численного решения магнитоэлектростатической задачи (5) используется метод «сшивки», описанный в работе [1].

При вычислении  $L_{ij}, b_{vj}, b_{jrv}$  по предложенному алгоритму необходимо решать МСЗ с заданным током  $I_j$ . Оказалось, что прямое решение такой задачи требует очень большого числа итераций. Значительный выигрыш в числе итераций (в 10—20 раз) дал следующий метод.

Пусть требуется найти  $L_{ij}(\Phi^0) = \Phi_i/I_j$ . Фиксируем  $\Phi^0$  — поток через экваториальное сечение индуктора, который мы хотим создать одним током  $I_j$ . С помощью подстройки  $I_j^{s+1} = I_j^s + c_j(\Phi^s - \Phi^0)$ , где  $\Phi^s$  — поток через сечение индуктора на  $s$ -й итерации, находим  $I_j^{s+1}$ . Итерационный процесс прекращается, когда  $\Phi^s = \Phi^0$ , при этом получаем ток  $I_j$  и, следовательно, определяем  $L_{ij}(\Phi^0)$ . Константа подстройки  $c_j$  подбирается численно из условий наилучшей сходимости итерационного процесса.

**5°. Алгоритм расчета разряда.** Рассмотрим алгоритм расчета сценария разряда для токамака Т-15. В токамаке Т-15 четыре внешние обмотки;  $I_4$  — индуктор, с помощью которого создается и поддерживается ток в плазме; током  $I_1$  управляют положением плазмы по горизонтали. Основная функция  $I_2$  и  $I_4$  — контролировать форму плазмы.

На показатель спада  $n_v$  наложим ограничения в виде

$$n_0 - \Delta \leq n_v \leq n_0 + \Delta. \quad (7)$$

Алгоритм состоит в подборе токов  $I_2$  и  $I_3$  на каждом шаге по времени с учетом условия (7).

В данной работе рассматривается упрощенная модель разряда, поэтому для определения  $R_p(t), \beta_0(t)$  можно воспользоваться результатами [4]; учтем еще, что при линейном распределении тока в плазме  $l_i = 0,75$ . Величина  $\mathcal{E}_4(t)$  выбиралась в следующем виде:

$$\mathcal{E}_4(t) = A_0 \exp[\alpha(t-t_0)^{\beta}] + at + \beta,$$

параметры  $A_0, \alpha, t_0, \beta, a, b$  определялись по результатам числен-

ных расчетов. Эта функция хорошо моделирует задание ступеньки для внешнего напряжения в цепи индуктора.

Задаем зависимости  $R_p(t)$ ,  $\beta_J(t)$ ,  $l_i(t)$  и  $\mathcal{E}_4(t)$ , начальные значения  $I_p$  и  $I_4$ . Из уравнений для токов  $I_p$  и  $I_4$  системы (6) определяем  $\Phi_4^1$  и  $\Phi_6$  на следующем шаге по времени. Задаем скорости роста токов  $I_2$  и  $I_3$  и определяем токи  $I_2$  и  $I_3$  по формуле

$$I_j^{n+1} = I_j^n + I_j^n \tau,$$

$\tau$  — шаг по времени. Предположим, что показатель спада с токами  $I_j^{n+1}$  не удовлетворяет условию (7), тогда изменяем скорость роста тока  $I_2$ , учитывая, что  $|I_2| \leq I_{2\max}$ . Если нельзя обеспечить нужного показателя спада только изменением тока  $I_2$ , начинаем аналогично подбирать  $I_3$ . При выполнении (7) скорости токов не изменяются. Данная процедура позволяет определять на каждом шаге токи  $I_2$  и  $I_3$ . Таким образом, получим  $\Phi_4^{n+1}$ ,  $\Phi_p^{n+1}$ ,  $I_2^{n+1}$ ,  $I_3^{n+1}$ . Из уравнений для потоков системы (6) и условия равнове-

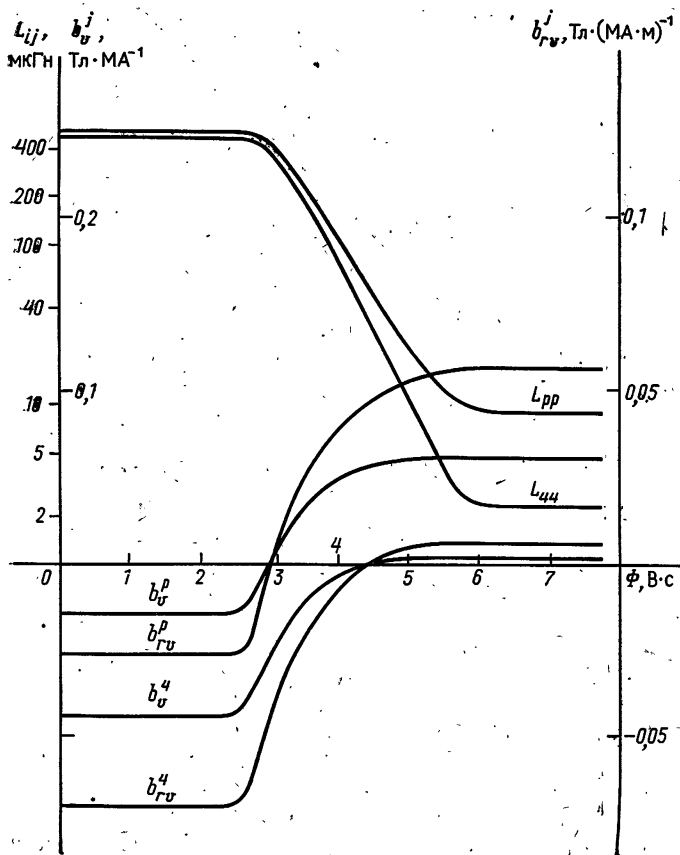


Рис. 1. Зависимости коэффициентов взаимной индукции и эффективностей от потока  $\Phi$



сия находим  $I_1^{n+1}$ ,  $I_4^{n+1}$ ,  $I_p^{n+1}$ . Делаем следующий шаг по времени.

6°. Результаты. Приведем основные результаты численных расчетов (рис. 1):  $L_{44}(\Phi)$ ,  $L_{pp}(\Phi)$ ,  $b_{v4}(\Phi)$ ,  $b_{vp}(\Phi)$ ,  $b_{rv}(\Phi)$ ,  $b^{4rv}(\Phi)$ . Большие значения потока соответствуют насыщенному сердечнику, и такая ситуация реализуется на начальной стадии разряда. При переходе сердечника в ненасыщенное состояние индуктивность увеличивается на два порядка.

В данной постановке задачи мы хотим придерживаться требуемой временной зависимости  $I_p(t)$ . Для управления  $I_p(t)$  имеются только два параметра:  $\mathcal{E}_4(t)$  — внешнее напряжение, приложенное к индуктору;  $R_4$  — сопротивление индуктора. На

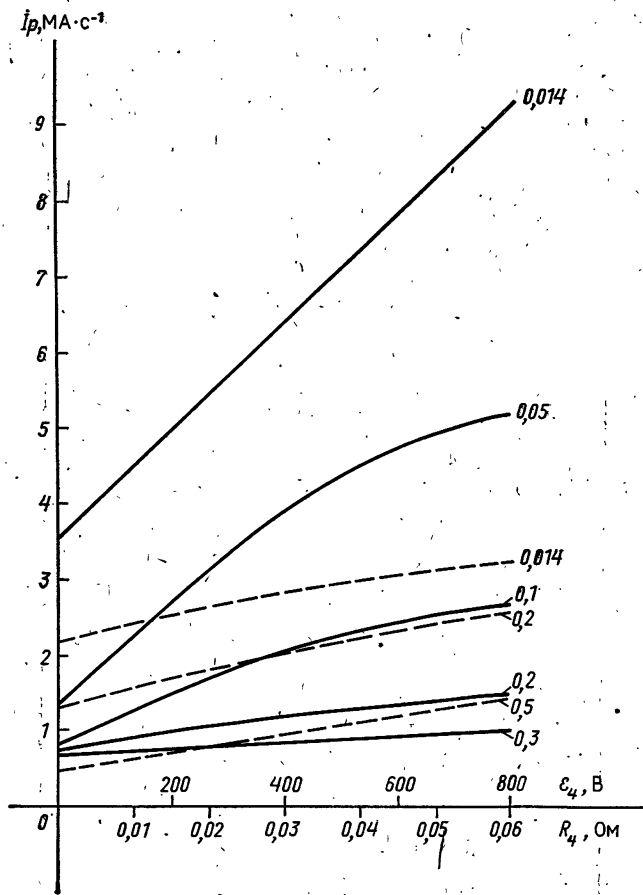


Рис. 2. Зависимости скорости роста тока  $I_p$  в плазме от  $\mathcal{E}_4$  — напряжения в цепи индуктора (штриховые) и от  $R_4$  — сопротивления индуктора (сплошные) в различные моменты времени.

рис. 2 приведены зависимости  $I_p$  от  $\mathcal{E}_4$  и  $R_4$  в различные моменты времени. Видно, что на начальной стадии разряда при  $t \leq 0,01$  с основное влияние на скорость роста тока в плазме оказывает  $R_4$ , а  $\mathcal{E}_4$  — слабое. В дальнейшем сопротивление  $R_4$  прак-

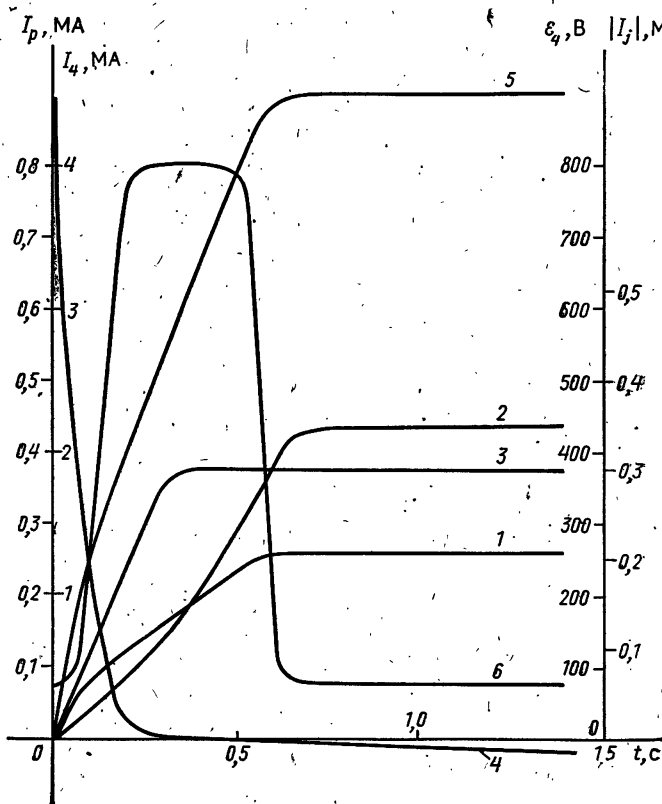


Рис. 3. Временные зависимости токов и напряжения в цепи индуктора: 1 — ток  $I_1$ ; 2 —  $I_2$ ; 3 —  $I_3$ ; 4 —  $I_4$ ; 5 —  $I_5$ ; 6 — напряжение  $\mathcal{E}_4$ .

тически не влияет на  $I_p$ , а все определяется напряжением в цепи индуктора. По этой диаграмме осуществляется подбор  $\mathcal{E}_4$  и  $R_4$  таким образом, чтобы получить требуемую функцию  $I_p(t)$ .

На рис. 3 приведены зависимости  $I_p(t)$ ;  $I_4(t)$ ;  $\mathcal{E}_4(t)$ ;  $I_1(t)$ ;  $I_2(t)$ ;  $I_3(t)$ ;  $I_4(t)$ , отвечающие разряду, в котором максимальный ток в плазме достигает 0,85 МА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Попов А. М., Цун С. В. Квазистатическое моделирование разряда в токамаке с железным сердечником. — Препринт ИАЭ, 3510/7. — М.: Изд-во Ин-та атомной энергии им. И. В. Курчатова.

2. Система управления плазменными процессами в токамаке с полоидальным дивертором / Гигиняк В. Ф., Губарев В. Ф., Каминский А. О. и др. — Препринт ХФТИ, № 81-4. — Харьков: Харьк. физ.-техн. ин-т АН УССР, 1981.

3. Шафранов В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. — М.: Госатомиздат, 1963, т. 2.

4. Бондарчук Э. Н., Дойников Н. И., Шмалько Г. И. Анализ системы полоидальных полей установки «Т-10М»: Препринт П-Б-0430. — Л.: НИИЭФА, 1979.

*Н. А. Гасилов, И. В. Зотов*

## **ВЕРТИКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ**

### **§ 1. Введение**

Наличие сепаратрисы, ограничивающей плазменный шнур в токамаке, создает условия для развития неустойчивости по вертикали. Для ее подавления предполагается использовать систему обратной связи, состоящую из активного и пассивного элементов. В качестве пассивного элемента предлагается применять либо сплошной кожух, либо систему дискретных кольцевых проводников.

В работах [1, 2] показано, что при наличии кожуха, достаточно близко расположенного к плазме, аксиально-симметричные неустойчивости стабилизируются. В работе [4] исследованы стабилизирующие свойства системы кольцевых проводников и показана возможность создания устойчивых диверторных конфигураций такого типа.

Все вышеперечисленные работы выполнены в предположении идеальной проводимости стабилизирующих элементов. В [5] в предположении о точности плазменного шнура получена величина скин-инкремента для системы двух проводников (активный и пассивный), обладающих конечной проводимостью, а также приведена оценка мощности обратной связи.

В данной работе рассмотрен подход к исследованию свойств стабилизирующих систем, состоящих из произвольного числа элементов, при их конечной проводимости. Для плазменного шнура с параметрами Т-12 предложены различные системы кольцевых проводников, обеспечивающих устойчивость плазмы в идеальном приближении. Найдены оптимальные расположения проводников. Для предложенных систем получены инкременты неустойчивости при конечной проводимости.

### **§ 2. Описание моделей**

1°. Двумерные линеаризованные МГД-уравнения. Одной из моделей, с помощью которых нами исследовалась устойчивость

плазмы, являются двумерные линейризованные МГД-уравнения идеально-проводящей несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{0i}], \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{H}_{0i} \nabla) \mathbf{H}_i + (\mathbf{H}_i \nabla) \mathbf{H}_{0i}, \quad (2)$$

$$\Delta p = \text{div} \mathbf{F}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{H}_{0i}$  — магнитное поле в равновесии;  $\mathbf{H}_i$  — возмущение магнитного поля;  $\mathbf{v}$  — скорость течения плазмы;  $\rho_0 = \text{const} > 0$  — плотность плазмы;  $\mathbf{F}$  — электромагнитная сила;  $p$  — возмущение обобщенного давления  $p_0 + H_{0i}^2/2$ .

Вне плазмы для возмущения поля  $\mathbf{H}_e$  имеем

$$\text{div} \mathbf{H}_e = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H}_e = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) сводятся к одному уравнению для потока  $\psi_e$ :

$$\Delta^* \psi_e \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

с условиями регулярности

$$\psi_e(0, z) = 0; \quad \psi_e(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (r, z) \rightarrow \infty. \quad (6)$$

На границе  $\Gamma_p$  плазма — вакуум ставятся условия непрерывности нормальной компоненты магнитного поля и баланса давлений:

$$\psi_e|_{\Gamma_p} = \psi_i|_{\Gamma_p}, \quad p|_{\Gamma_p} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_e}{\partial n} \mathbf{H}_{0etg}. \quad (7)$$

На поверхности стабилизирующих проводников условия меняются в зависимости от выбора модели. В случае, когда проводники замкнуты в секции по тороидальному направлению с пренебрежимо малыми разъемами по сравнению с диаметрами проводников, ставятся условия их идеальной проводимости и равенства нулю суммы поверхностных токов:

$$\psi_e|_{\Gamma_k} = C(t); \quad k = \overline{1, M}, \quad M > 1, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^M I_k = \sum_{k=1}^M \oint_{\Gamma_k} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_e}{\partial n_k} dl_k = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\Gamma_k$  — граница сечения  $k$ -го проводника;  $I_k$  — ток Фуко, текущий по нему;  $M$  — число проводников.

В случае взаимно изолированных проводников имеем

$$\psi_e|_{\Gamma_k} = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (10)$$

В начальный момент задается распределение скорости плазмы при ее нулевом смещении от положения равновесия.

2°. Модель «твердого сдвига». Наряду с моделью двумерных МРД-уравнений применялся энергетический принцип.

Для вариации потенциальной энергии  $\delta W$  имеем

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e, \quad (11)$$

где

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \iiint_{V_i} (\mathbf{H}_i + [\mathbf{j}_0 \times \boldsymbol{\xi}]) \mathbf{H}_i d\tau_i, \quad \delta W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} (\mathbf{H}_e)^2 d\tau_e,$$

$\boldsymbol{\xi}$  — смещение плазмы от положения равновесия;  $V_i$  и  $V_e$  — области внутри и вне плазмы соответственно.

Как известно [1—4], в системах с дивертором наиболее опасной является вертикальная неустойчивость. Модель «твердого сдвига», когда смещение плазмы имеет вид  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_r = 0, \xi_\varphi = 0, \xi_z = \text{const}\}$ , может служить хорошим приближением такой неустойчивости. Для такого смещения  $\delta W$  преобразуется к виду

$$\delta W = \pi \oint_{\Gamma_p} \psi_i i_p dl, \quad (12)$$

где  $i_p$  — наведенный поверхностный ток на границе плазмы. Формула (12) получена в предположении, что равновесный ток на границе плазма — вакуум обращается в нуль. Для нахождения  $i_p$  использовался метод интегральных уравнений.

Для модели «твердого сдвига» имеем следующую приближенную оценку частоты в устойчивом случае, или инкремента в неустойчивом случае:

$$\lambda_1 = \delta W / \left( \pi \xi_z \iint_{\Omega_i} \rho_0 r dr dz \right), \quad (13)$$

где  $\Omega_i = V_i \cap \{\varphi = \text{const}\}$ .

3°. Процедура оптимизации. Эффективность стабилизирующей системы проводников будем оценивать по числу проводников  $M$  и по квадрату частоты колебаний  $\lambda_1$ . Кроме этого, потребуем, чтобы система стабилизировала плазму с некоторым запасом устойчивости  $\lambda_0$ . Будем предполагать, что проводники находятся на некотором контуре  $C$ , который выбирается из следующих соображений: 1) при удалении проводников от плазмы их стабилизирующее действие ухудшается; 2) расстояние между плазмой и контуром ограничивается шириной диверторного слоя.

Таким образом, задачу об оптимизации стабилизирующей системы можно сформулировать в следующем виде:

$$M \rightarrow \min, \quad (14)$$

$$\lambda_1(\theta_1, \dots, \theta_M) \rightarrow \max, \quad (15)$$

$$0 < \theta_i < 2\pi, \quad i = \overline{1, M}$$

$$\max_{0 < \theta_i < 2\pi, i = \overline{1, M}} \lambda_1(\theta_1, \dots, \theta_M) \geq \lambda_0. \quad (16)$$

Здесь  $\theta_i, i = \overline{1, M}$  — угловые координаты проводников;  $N$  — множество натуральных чисел. Величина  $\lambda_0$  определяется погрешностью модели.

Трудность решения задачи (14)—(16) заключается в том, что значения критерия  $\lambda_1$  вычисляются с помощью численного решения двумерных МГД-уравнений и это вычисление с точки зрения затрат времени ЭВМ является дорогостоящим. Нами применялся двухэтапный алгоритм оптимизации. На первом этапе с помощью модели «твердого сдвига» сужается множество значений  $(M, \theta_1, \dots, \theta_M)$ , содержащее эффективное решение. На втором этапе включается модель двумерных МГД-уравнений. На каждом этапе для фиксированного числа проводников  $M$  методом покоординатного спуска решается задача на экстремум (15); и если полученное решение  $(M, \theta_1, \dots, \theta_M)$  удовлетворяет условию (16), то оно является решением исходной оптимизационной задачи (14)—(16).

Предложенный алгоритм позволяет существенно уменьшить объем вычислений.

3°. Конечная проводимость. Модель, применяемая нами, состоит из электротехнических уравнений для пассивных изолированных проводников и уравнения вертикального движения плазмы как целого:

$$\sum_{i=1}^M L_{ik} \frac{dI_i}{dt} + I_p \frac{dL_{kp}}{d\xi_z} \frac{d\xi_k}{dt} + r_k I_k = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (17)$$

$$m \frac{d^2 \xi_z}{dt^2} = \sum_{i=1}^M \widehat{b}_i I_i + \widehat{b}_p \xi_z.$$

Здесь  $L_{ii}, L_{ik}$  — коэффициенты само- и взаимной индукции проводников;  $L_{ip}$  — коэффициент взаимной индукции плазменного шнура и  $i$ -го проводника;  $r_i$  — сопротивление  $i$ -го проводника;  $I_p$  — ток в плазме;  $\widehat{b}_i, \widehat{b}_p$  — коэффициенты эффективности.

Будем искать временную зависимость в виде  $e^{\gamma H^t}$ , где  $\gamma$  — безразмерный,  $\gamma_H$  — альфеновский инкременты. Тогда систему (17) можно свести к виду

$$\gamma \sum_{i=1}^M \alpha_{ik} j_i + \gamma \frac{L_{kp}}{L_{kk}} \xi + \eta_k j_k = 0, \quad k = \overline{1, M}, \quad (18)$$

$$\gamma^2 \widehat{\xi} = \sum_{i=1}^M b_i j_i + b_p \widehat{\xi}.$$

Здесь  $\eta_k = \gamma_{sk} / \gamma_H$  — малая безразмерная величина;

$$L'_{kp} = \frac{dL_{kp}}{d\hat{\xi}}, \quad b_i = \frac{\hat{b}_i I_p}{m a \gamma_H^2}, \quad b_p = \frac{\hat{b}_p}{m \gamma_H^2},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{L_{ik}}{L_{kk}}, \quad j_k = \frac{I_k}{I_p}, \quad \gamma_{sk} = \frac{r_k}{L_{kk}};$$

$\xi_z = \hat{\xi} a$ ,  $a$  — малый радиус тора.

Основным вопросом является определение коэффициентов, входящих в систему (18). Они могут определяться различными способами, например с помощью точечной модели [5], энергетического принципа или временной задачи. В данной работе применяется модель «твердого сдвига». Рассмотрим следующие частные случаи.

а) Проводники отсутствуют. Из (18) имеем  $\gamma^2 \hat{\xi} = b_p \hat{\xi}$  или  $b_p = \gamma^2$ . Обозначим через  $\gamma_0$  инкремент системы в альфеновских единицах при отсутствии стабилизирующих элементов. Тогда  $b_p = \gamma_0^2$ .

б) При фиксированном смещении шнура  $\hat{\xi}_0 = 1$  и при одном  $k$ -м идеальном проводнике из (18) с учетом малости  $\eta_k$  получим

$$\gamma_k j_k (1) + \gamma_k \frac{L'_{kp}}{L_{kk}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{L'_{kp}}{L_{kk}} = -j_k (1),$$

$$\gamma_k^2 = b_k j_k (1) + \gamma_0^2, \quad b_k = (\gamma_k^2 - \gamma_0^2) / j_k (1),$$

где  $j_k (1)$  — нормированный ток Фуко, наведенный в  $k$ -м проводнике;  $\gamma_k$  — инкремент системы в рассматриваемом случае.

Подставляя полученные выражения для коэффициентов в (18), получаем

$$\gamma \sum_{i=1}^M \alpha_{ik} j_k - \gamma j_k (1) \hat{\xi} + \eta_k j_k = 0, \quad k = \overline{1, M},$$

(19)

$$\gamma^2 \hat{\xi} = \sum_{i=1}^M j_i (\gamma_i^2 - \gamma_0^2) / j_i (1) + \gamma_0^2 \hat{\xi}.$$

Пусть проводники расположены так, что обеспечивают устойчивость плазменного шнура в приближении его идеальной проводимости. Тогда инкремент развития неустойчивости соответствует скиновому времени проводников и, следовательно, в принятых обозначениях  $\eta_k$  имеет порядок  $10^{-4}$ . Отсюда видно, что инерционным членом в уравнении движения в системе (19) можно пренебречь:

$$\sum_{i=1}^M j_i (\gamma_i^2 - \gamma_0^2) / j_i (1) + \gamma_0^2 \hat{\xi} = 0.$$

Отсюда найдем  $\xi$  и подставим в электротехнические уравнения:

$$\gamma \sum_{i=1}^M \alpha_{ik} j_i + \gamma \sum_{i=1}^M j_i \frac{\gamma_i^2 - \gamma_0^2}{\gamma_0^2} \frac{j_k(1)}{j_i(1)} + \eta_{kj} = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (20)$$

Введем величину  $\lambda = \gamma \eta \gamma$ . Для определения  $\lambda$  имеем задачу на собственные значения:

$$\lambda A_j = j, \quad (21)$$

где

$$A_{ki} = \left( -\alpha_{ik} - \frac{\gamma_i^2 - \gamma_0^2}{\gamma_0^2} \frac{j_k(1)}{j_i(1)} \right) / \gamma_{sk}, \quad j = (j_1, \dots, j_M).$$

### § 3. Результаты расчетов.

Метод, применяемый нами при расчете равновесия, описан в работе [1]. Расчеты проводились для плазмы с параметрами Т-12. Расположение вакуумной камеры в установке Т-12 фиксирует большой радиус  $R = 36$  см и малый радиус  $a = 8$  см. Кроме того, фиксированы координаты обмоток полоидального поля. При расчетах равновесия преследовалась цель — создать каплеобразную равновесную конфигурацию, обладающую эллиптичностью сечения, подобной ИНТОРУ,  $K \approx 1,6 \div 1,7$ , при расщеплении сепаратрисных поверхностей по  $r$ ,  $\delta r \geq 0,1$  а. Последнее условие является необходимым, для того чтобы равновесная конфигурация была с одним дивертором [3]. На рис. 1 показаны линии уровня  $\psi_0 = \text{const}$  рассчитанного равновесного состояния плазмы.

Сначала изучалось стабилизирующее действие проводников в идеальном приближении. На рис. 1 штриховой линией нанесен контур  $S$ , удаленный от плазмы на расстоянии  $\rho = 0,25 a$ , на котором располагались проводники. На рис. 2 (кривые 1, а и 1, б) проведена зависимость инкремента аксиально-симметричной неустойчивости от полоидального угла  $\theta$  при одном стабилизирующем проводнике. Инкремент отнесен к своему максимальному значению  $\gamma_{\max}$ . В отсутствие стабилизирующих проводников неустойчивость плазмы развивается с этим инкрементом.

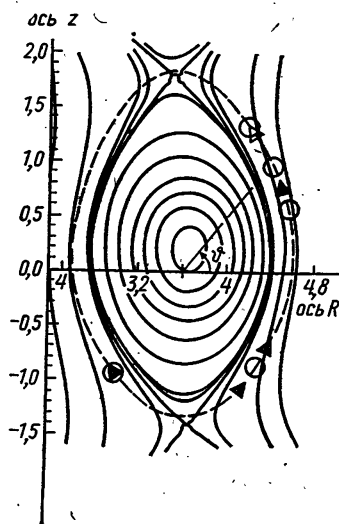


Рис. 1. Линии  $\psi_0 = \text{const}$  равновесного положения плазмы. Кружки и треугольники — оптимальные положения проводников типа «а» ( $\theta_1 = 66^\circ$ ;  $\theta_2 = 50^\circ$ ;  $\theta_3 = -32^\circ$ ;  $\theta_4 = -51^\circ$ ;  $\theta_5 = -123^\circ$ ) и «б» ( $\theta_1 = 65^\circ$ ;  $\theta_2 = 42^\circ$ ;  $\theta_3 = -43^\circ$ ;  $\theta_4 = -61^\circ$ ;  $\theta_5 = -123^\circ$ )



Из представленной зависимости видно, что один проводник, помещенный при  $\theta=60^\circ$ , оказывает наибольшее воздействие, но он не стабилизирует плазму. Затем один проводник фиксировался

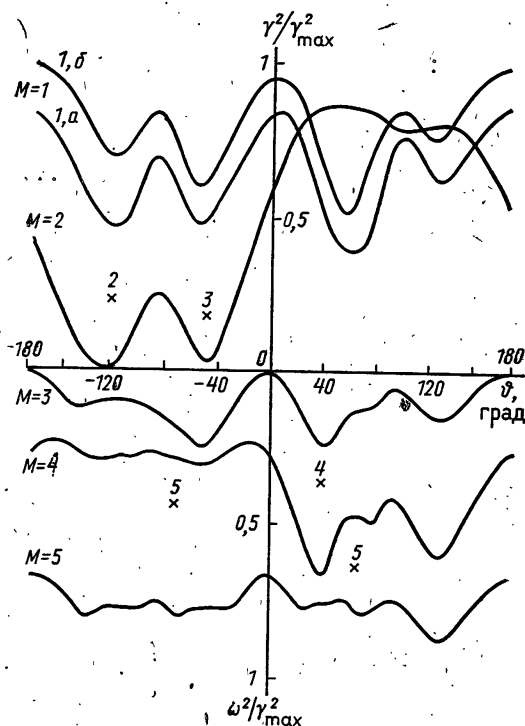


Рис. 2. Зависимость инкрементов неустойчивости и частот колебаний от положений 1; 2; 3; 4 и 5 стабилизирующих проводников по азимуту  $\theta$ . Кривая 1,а соответствует полной задаче; 1,б — модели «твердого сдвига»

при  $\theta=60^\circ$ , а второй двигался по контуру. Для этого случая находилось оптимальное положение второго проводника. Далее эта процедура делалась для 3, 4 и 5 проводников (рис. 2, кривые 3; 4; 5). На том же рисунке крестиками отмечены результаты расчетов по полной модели для 2; 3; 4 и 5 проводников.

Оказалось, что пять проводников, расположенных описанным образом, стабилизируют плазму. Полученные расположения проводников использовались в качестве начального приближения для процедуры оптимизации. Были проведены две серии расчетов по алгоритму оптимизации для стабилизирующих систем типа «а» и «б». Оптимальные положения проводников, соответствующие типам «а» и «б», приведены на рис. 1.

Для системы типа «а» проводился расчет инкремента неустойчивости при конечной проводимости проводников в предположении, что постоянные времени всех проводников одинаковы:  $\tau_h = 1/\nu_{sh} = \tau$ . Оказалось, что инкремент развития медленной неустойчивости связан с постоянной времени проводников следующим образом:

$$\lambda\tau = 0,42.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А. М., Сычугов Д. Ю. Равновесие и устойчивость плазменного шнура с дивертором. — Вестн. Моск. ун-та, 1980, № 3, с. 32—37.
2. Данилов А. Ф., Попов А. М. — Физика плазмы, 1977, т. 3, с. 291.
3. Герасимов С. Н., Попов А. М., Сычугов Д. Ю. — Физика плазмы, 1983, т. 4, с. 688—696.
4. Dnestrovskii Ju. N., Kostomarov D. P., Pistunovich V. I. et al. Optimization of conductor stabilizing system for Intor. USSR contribution to 4-th session of the Intor workshop, Phase 2—A. — Brussels, Marth 1982, p. 55—65.
5. Jardin S. C., Larrabee D. A. Feedback stabilization of rigid axisymmetric modes in tokamaks. — Nuclear Fusion, 1982, v. 22, N 8.

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ,  
АВТОМАТИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ  
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*  
Редактор *Г. М. Карасева*  
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*  
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*  
Корректоры *Л. А. Айдарбекова, С. Ф. Будаева*

ИБ № 2286

Сдано в набор 19.04.85.  
Подписано в печать 03.02.86.  
Л-66103 Формат 60×90/16 Бумага тип. № 3  
Гарнитура литературная. Высокая печать  
Усл. печ. л 17,5 Уч.-изд. л. 19,22  
Тираж 2900 экз. Заказ 88  
Цена 3 р. 10 к. Изд. № 3973

Ордена «Знак Почета» издательство  
Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Типография ордена «Знак Почета»  
изд-ва МГУ.  
119899, Москва, Ленинские горы

УДК 518.541.183

Денисов А. М., Туйкина С. Р. О решении некоторых обратных задач неравновесной динамики сорбции. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 5—15.

Рассматриваются обратные задачи динамики сорбции, состоящие в определении изотермы сорбции по выходной кривой. Для этих обратных задач доказаны теоремы единственности решения. Построены методы их численного решения. Приведены примеры решения модельных задач.

Библиогр. 6 назв. Табл. 1

УДК 518:517.948

Васильев Ф. П. О регуляризации метода Стеффенсена при неточном задании исходных данных. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 15—23.

Рассматривается задача минимизации при условии, когда минимизируемая функция и функции, задающие множество с помощью ограничений типа равенств и неравенств, известны с погрешностью. Предлагается регуляризованный метод Стеффенсена для решения такой задачи. Показывается, что последовательность, полученная этим методом, при согласованном изменении параметров регуляризации, штрафа, погрешностей сходится по норме к точке минимума с минимальной нормой.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519.6

Гончарский А. В., Романов С. Ю., Степанов В. В., Черепашук А. М. Конечномерные параметрические модели в обратных задачах астрофизики. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 23—39.

Рассматриваются две обратные задачи астрофизики: определение методом лунных покрытий диаметров звезд, моментов затмения звезд, скорости Луны; а также определение геометрических параметров двойных систем по наблюдаемым кривым блеска. Получаемые при этом фундаментальные данные о звездах по точности на несколько порядков превосходят другие известные методы. Исходные задачи являются некорректно поставленными. Устойчивое решение удается получить, используя конечномерную параметризацию.

Библиогр. 15 назв. Ил. 6.

УДК 518

Гребенников А. И. О регуляризирующих свойствах явных аппроксимирующих сплайнов. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 39—46.

Предложен метод решения некоторых операторных уравнений I рода, заключающийся в сглаживании правой части методом последовательных сглаживаний на основе явной сплайн-аппроксимации и численном обращении оператора. Для выделенного класса задач регуляризирующие свойства метода в целом сводятся к регуляризирующим свойствам явной сплайн-аппроксимации, которые изучены при определенных предположениях о погрешности входных данных и шаге дискретизации.

Библиогр. 11 назв.

УДК 512.25:519.28:519.240

Жуковский Е. Л. Статистическая регуляризация решений обратных некор-

ректно поставленных задач обработки и интерпретации результатов эксперимента. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 47—72.

Рассматривается развитие помехоустойчивых методов автоматизированной обработки экспериментальных данных по статистической входной и априорной информации. Проведен сравнительный анализ развития этих методов за последнее время, прослеживается также их связь с детерминистскими подходами в регулярных методах решения некорректно поставленных задач, а также их соотношение с методом максимального правдоподобия и планирования эксперимента в задачах обработки и интерпретации.

Библиогр. 29 назв.

УДК 519.642.3

Денисов А. М., Крылов А. С. О численном решении интегральных уравнений I рода. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 72—79.

Рассматривается метод решения интегральных уравнений I рода, основанный на представлении приближенного решения в виде конечного разложения по некоторому базису. Приводятся примеры решения ряда модельных задач. Проводится численный анализ зависимости погрешности приближенного решения от точности задания исходной информации.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3

УДК 517.946

Баев А. В. Об одном методе решения обратной краевой задачи для волнового уравнения. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 80—88.

Для одномерного волнового уравнения рассматриваются вопросы существования и единственности решения обратной краевой задачи на полупрямой, состоящей в определении переменного коэффициента уравнения. Построен регуляризирующий по Тихонову алгоритм нахождения приближенного решения на основе входной информации, заданной с погрешностью.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.233.2:519.642.3

Меченов А. С. Метод регуляризации и задачи линейной регрессии. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 88—92.

Рассмотрены вопросы применения аппарата регрессионного анализа к методу регуляризации решения систем линейных алгебраических уравнений с плохообусловленной матрицей и экспериментальной правой частью и интегральных уравнений первого рода с последующей оценкой дисперсии решения и проверкой нуль-гипотез по различным критериям.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.958:537.812

Головин Г. Т., Хапаев М. М. К расчету параметров электротехнических устройств разностным методом и с помощью интегральных уравнений. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 93—104.

Описаны разностный и интегральный методы расчета параметров скин-эффекта. Указаны достоинства и недостатки каждого метода. На примере двух

осесимметричных систем проведено сравнение результатов расчетов, полученных каждым методом.

Библиогр. 9 назв. Ил. 6. Табл. 2

УДК 621.378.325.

**Сухоруков А. П., Трофимов В. А.** Математическое моделирование многопараметрических задач нелинейной адаптивной оптики. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 105—120.

Построены математические модели, позволяющие моделировать многопараметрические задачи нелинейной адаптивной оптики. Получены зависимости критериев качества компенсации нелинейных искажений оптического излучения от числа оптимизируемых параметров. Результаты аналитического рассмотрения подтверждены численными экспериментами.

Библиогр. 15 назв. Ил. 3. Табл. 2

УДК 518.61

**Арефьев В. С.** Устойчивость и сходимость системы нелинейных разностных уравнений. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 120—127.

Исследуется устойчивость и сходимость решений системы нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующей систему нелинейных параболических уравнений. Рассматривается также линейная система аналогичной структуры. Для линейной системы построена энергетическая норма, в ней доказаны устойчивость и сходимость при условиях, которые являются необходимыми. Устойчивость и сходимость решений нелинейной системы разностных уравнений доказана в аналогичной норме.

Библиогр. 8 назв.

УДК 546.185.221.13+547.261.118:541.127

**Васильев А. Ф., Галкин В. Я., Жуковский Е. Л.** О статистических оценках изокинетической температуры. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 127—135.

Показано, что существующие методы оценивания изокинетической температуры дают смещенные величины оценок. Приведены линейные приближения этих смещений. Предложены методы несмещенного оценивания изокинетической температуры, проиллюстрированные на экспериментальных данных реакции конденсации пирокатахиновых эфиров арилфосфонистых кислот с метилвинилкетеном.

Библиогр. 7 назв. Ил. 1

УДК 519.2:518.1

**Белов А. Г., Галкин В. Я.** Сравнительный анализ методов оценки параметров сложнеймановского распределения. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 135—142.

Рассмотрены методы оценивания неизвестных параметров сложнеймановского распределения, некоторые из которых являются модификациями методов моментов. По результатам расчетов на ЭВМ относительными ошибками, допускаемых при оценке неизвестных параметров, проведен сравнительный анализ методов оценивания.

Библиогр. 10 назв. Ил. 3

УДК 538.566:519.272

Галкин В. Я., Ковригин В. А., Матвеева О. А., Плискин С. Ю. Об условиях интерпретируемости спектров при автоматизированной обработке сигналов одного класса. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 142—150.

Рассматриваются вопросы интерпретируемости Фурье-спектров сигналов, отраженных от протяженных объектов. В случае линейного объекта получены условия взаимнооднозначного соответствия точек спектра и положения точечного отражателя на объекте. Предложен автоматизированный выбор интервала усреднения с учетом ограничений, вызываемых требованиями разрешения и наличием временной зависимости частоты. Приведены результаты численного исследования экспериментальной информации.

Библиогр. 3 назв. Ил. 4

УДК 532.51

Шенин Е.-А. Исследование уединенных решений мелкой воды. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 150—155.

Проводится численное исследование поведения решений уравнения мелкой воды, имеющих вид уединенных волн. Доказана единственность решения одномерного уравнения, описывающего форму вихря в зависимости от величины его скорости. Построены алгоритм численного нахождения этого решения и разностная схема, для которой выполняются сеточные аналоги законов сохранения, свойственных дифференциальным уравнениям.

Библиогр. 5 назв. Ил. 2

УДК 518:538.13

Хапаев М. М., Осипов С. Г. О численном интегрировании уравнения Ландау—Лифшица—Гильберта. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 155—159.

Предлагается экономичный проекционно-разностный метод для численного интегрирования уравнения движения намагниченности, основанный на слабой форме уравнения.

Библиогр. 12 назв.

УДК 519.6

Барашков А. С., Дмитриев В. И. Решение обратных задач в классе квазиодномерных функций. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 160—175.

Рассмотрено решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерной среды. Развитые методы решения основаны на том предположении, что распределение электропроводности представимо в виде суммы плавно меняющейся компоненты и небольшой по величине добавки. Такая модель позволяет ввести в уравнения задачи малые параметры и использовать их для построения последовательности функций, аппроксимирующей решение обратной задачи.

Библиогр. 20 назв. Ил. 11

УДК 518.3

Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Исследование математических моделей микрополосковых линий. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 175—198.

На модельных задачах теории микрополосковых линий передачи рассматриваются методы решения задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра. Исследуются свойства спектра фредгольмовых оператор-функций  $F(\lambda)$  в весовых классах Соболева. Предлагается численный метод нахождения приближенных характеристических чисел  $F(\lambda)$ . Доказываются теоремы о непустоте, дискретности и факторизации спектра, о сходимости приближенных собственных спектров и характеристических чисел к точным.

Библиогр. 13 назв. Ил. 2

УДК 519.6

**Барашков И. С., Дмитриев В. И.** Метод линеаризации в двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 199—215.

Рассмотрен алгоритм решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования для случая  $E$ -поляризации, основанный на минимизации сглаживающего функционала Тихонова с помощью метода Ньютона—Канторовича (метода линеаризации). При решении прямой задачи магнитотеллурического зондирования в алгоритме используется метод интегральных уравнений. Для решения интегрального уравнения прямой задачи построен итерационный метод, получена оценка скорости сходимости этого метода.

Библиогр. 12 назв. Ил. 1

УДК 519.6:550.83

**Березина Н. И., Круглова Е. А.** Решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием амплитудных и фазовых характеристик. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 215—223.

Предложен устойчивый численный метод решения одномерных обратных задач магнитотеллурического зондирования — задач восстановления проводимости среды по измеренным на поверхности Земли фазе адмитанса или кажущейся проводимости как функциям частоты электромагнитного поля, — основанный на линеаризации задачи и использовании дополнительной априорной информации о геоэлектрическом разрезе на этапе дополнительной обработки решения.

Библиогр. 7 назв. Ил. 2

УДК 517.968.74:537.876.23

**Дмитриев В. И., Салтыков Е. Г.** Численный метод решения обратной задачи зондирования сферически симметричной ионосферы. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 223—230.

Рассматривается задача об определении монотонной функции распределения плотности электронной концентрации в ионосфере по функциям зависимости времени распространения электромагнитного сигнала и угла прихода от частоты. Показано, что эта задача может быть сформулирована в виде нелинейного интегро-дифференциального уравнения, которое может быть решено методом последовательных приближений.

Библиогр. 3 назв. Ил. 1

УДК 517.9:53

**Гусаров А. Л.** К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред. — В кн.: Методы мате-



математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 231—242.

При определенных ограничениях на проводимость доказана единственность решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3

УДК 533.95+538.4

Попов А. М. Численное моделирование МГД-процессов в высокотемпературной плазме. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 243—259.

Дается анализ ряда математических моделей и численных кодов, созданных для изучения магнитогидродинамических (МГД) процессов в высокотемпературной плазме токамака. Обсуждаются различные подходы к численному решению нелинейных задач для систем МГД-уравнений, возникающих в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу.

Библиогр. 23 назв. Ил. 3

УДК 533.95+538.4

Андреев В. Ф. Математическое моделирование временной эволюции разряда в токамаке. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 259—266.

Моделируются временные зависимости интегральных характеристик разряда — тока в плазме, тока в индукторе и токов в управляющих обмотках в присутствии ферромагнетика. Влияние железного сердечника учитывается введением нелинейных коэффициентов взаимной индукции в систему электротехнических уравнений. Полученная система решается численно. Рассчитаны сценарии разряда для установки Т-15.

Библиогр. 4 назв. Ил. 3

УДК 533.95+538.4

Гасилов Н. А., Зотов И. В. Вертикальная неустойчивость тороидальной плазмы при конечной проводимости стабилизирующих элементов. — В кн.: Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. — М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 266—273.

Рассматривается подход к изучению вертикальной неустойчивости плазмы при конечной проводимости стабилизирующих элементов. На основе численного решения уравнения магнитной гидродинамики рассчитываются коэффициенты эффективности стабилизирующей системы проводников в предположении их идеальной проводимости. Найденные коэффициенты используются при построении модели, учитывающей конечную проводимость витков. Для плазменного шнура с параметрами Т-12 предложены различные системы проводников, обеспечивающих устойчивость плазмы в идеальном приближении. Найден оптимальные расположения проводников. Для предложенных систем получены инкременты неустойчивости при конечной проводимости элементов.

Библиогр. 5 назв. Ил. 2

6